

سؤالات چهارگزینه‌ای مبحث لگاریتم

یازدهم تجربی - یازدهم ریاضی



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

۱ دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{1 - \log(x-1)}$ به کدام صورت است؟

(۲) $[2, 10]$

(۱) $(1, 2]$

(۴) $(1, 11]$

(۳) $[1, 11)$

۲ دو تابع f و g مفروض اند، در کدام گزینه دو تابع مساوی اند؟

(۲) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{|x|}$ و $g(x) = 1$

(۱) $f(x) = 2\log x$ و $g(x) = \log x^2$

(۴) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ و $g(x) = \frac{|x|}{x}$

(۳) $f(x) = (\sqrt{x})^2$ و $g(x) = x$

۳ اگر $f(x) = 1 - (\frac{1}{p})^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ ، کدام بازه است؟

(۲) $(-\infty, 0)$

(۱) $[-1, 1]$

(۴) $(0, +\infty)$

(۳) $(-\infty, +\infty)$

۴ تابع $f(x) = \log_3^{(ax+b)}$ فقط برای مقادیر $x \in (-\frac{1}{p}, +\infty)$ با معنی است. اگر $f(4) = 2$ باشد، آن گاه $f(-\frac{4}{9})$ کدام است؟

(۲) -1

(۱) -2

(۴) 1

(۳) $\frac{1}{p}$

۵ اگر $\log 5 = 3k$ ، آنگاه $\log \sqrt[3]{1/6}$ کدام است؟

(۲) $2 - 5k$

(۱) $1 - 4k$

(۴) $1 - k$

(۳) $1 - 2k$

۶ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$ ، به کدام صورت بازه‌ها است؟

(۲) $[-2, 0] \cup (3, 5)$

(۱) $[-2, 0) \cup (3, 5]$

(۴) $(0, 5]$

(۳) $[-2, 3)$

۷ اگر $f(x) = 2^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{f(\frac{1}{x}) - f(x)}$ ، به کدام صورت است؟

(۲) $[-1, 0) \cup (0, 1]$

(۱) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

(۴) $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$

(۳) $[-1, 0) \cup [1, +\infty)$

۸ از دو معادله دوجمله‌ای $2^{x-y} \times 4^{x+y} = 1$ و $\log y = 2\log 3 + \log x$ ، مقدار y کدام است؟

(۲) 2

(۱) 1

(۴) 4

(۳) 3



۹ تابع با ضابطه $f(x) = a + \log_p^{(bx-4)}$ از دو نقطه $(2, 6)$ و $(12, 10)$ می‌گذرد. a کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

۱۰ نمودارهای دو تابع $y = (\frac{\sqrt{p}}{3})^{3x}$ و $y = 3^x + \frac{1}{3}$ در نقطه A متقاطع‌اند. فاصله نقطه A از نقطه $(-1, 1)$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $\sqrt{2}$
(۳) ۲
(۴) $\sqrt{5}$

۱۱ اگر $f(x) = 4 - e^{3x}$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{xf^{-1}(x)}$ کدام است؟

- (۱) $[3, 4]$
(۲) $[2, 3]$
(۳) $[0, 4]$
(۴) $[0, 3]$

۱۲ تابع با ضابطه $f(x) = a + \log_p^{(3x+b)^2}$ از دو نقطه $(5, 11)$ و $(21, 15)$ می‌گذرد، a کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۳ نمودارهای دو تابع $f(x) = 4^x$ و $g(x) = (\frac{1}{4})^{3x} + \frac{3}{4}$ در نقطه A متقاطع‌اند. فاصله نقطه A تا نقطه $(-\frac{1}{4}, 1)$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $\sqrt{2}$
(۳) ۲
(۴) $\sqrt{5}$

۱۴ از دو معادله دوجمله‌ای $3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y}$ و $\log(x + 2y) = 1 + \log y$ مقدار x کدام است؟

- (۱) $1/2$
(۲) $1/4$
(۳) $1/5$
(۴) $1/6$

۱۵ تابع $f(x) = \sqrt{\log_p^{(2x-3)} + \log_{\frac{1}{p}}^{(x-1)}}$ به ازای کدام مقادیر x تعریف می‌شود؟

- (۱) $(\frac{3}{4}, 2]$
(۲) $(\frac{3}{4}, +\infty)$
(۳) $[2, +\infty)$
(۴) $(\frac{3}{4}, 4]$

۱۶ ضابطه وارون تابع $f(x) = 5 + \log_3^x$ کدام است؟

- (۱) $y = 2^x - 5$
(۲) $y = 2^{x+5}$
(۳) $y = 2^{x-5}$
(۴) $y = 5^{x-5}$

۱۷ اگر دامنه تابع $f(x) = \log(ax^2 + bx + 3)$ به صورت $(-\infty, 2)$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$
(۲) $\frac{2}{3}$
(۳) $\frac{3}{4}$
(۴) $-\frac{3}{4}$

۱۸ اگر دامنه تابع $f(x) = \log \frac{ax+6}{x+b}$ بازه $(-2, 3)$ باشد، نمودار f خط $y = 1$ را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{32}{7}$
(۲) $-\frac{7}{9}$
(۳) $-\frac{7}{6}$
(۴) $\frac{36}{7}$



۱۹ اگر $g(x) = 5^x + \frac{1}{x}$ و $f(x) = \sqrt{x^3 g(x)}$ ، دامنه تابع f کدام است؟

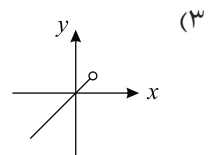
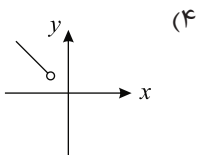
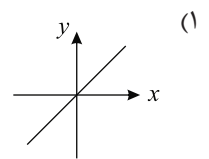
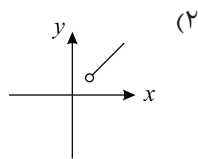
(۲) $(-\infty, 0]$

(۱) $[0, +\infty)$

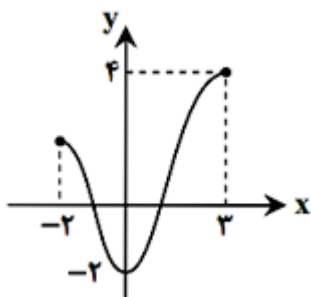
(۴) $\{0\}$

(۳) $\mathbb{R}$

۲۰ اگر $f(x) = \log_f^{(r-x)}$ ، نمودار تابع $y = f^{-1} \circ f(x)$ کدام است؟



۲۱ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر باشد، دامنه تعریف تابع $g(x) = f(\log_2^{(1-x)})$ شامل چند عدد صحیح است؟



(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۸

۲۲ اگر $\ln(2x-3) + 3 \ln \sqrt[3]{x-1} = \ln 24$ ، حاصل $\ln(2x^2 - 19x + \sqrt{e})$ کدام است؟

(۲) صفر

(۱) $\ln(1 + \sqrt{e})$

(۴) $\frac{1}{e}$

(۳) $\frac{1}{e}$

۲۳ اگر $\log_9 a = a$ ، حاصل $\log_{\frac{3}{1001}} \sqrt[3]{\frac{3}{1001} \sqrt[3]{\frac{3}{1001}}}}$ چند برابر a است؟

(۲) $-\frac{11}{144}$

(۱) $-\frac{11}{144}$

(۴) $-\frac{1}{36}$

(۳) $-\frac{1}{12}$

۲۴ اگر لگاریتم $9\sqrt[3]{3}$ در پایه $3\sqrt[3]{9}$ برابر با a باشد، حاصل لگاریتم $5a + 9$ در پایه $\sqrt{2}$ کدام است؟

(۲) ۲

(۱) ۶

(۴) ۴

(۳) ۸

۲۵ اگر $4^{\log a} = b^{\log 3}$ ، مقدار $\log_a b$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{3} \log_2^3$

(۱) $2 \log_3^2$

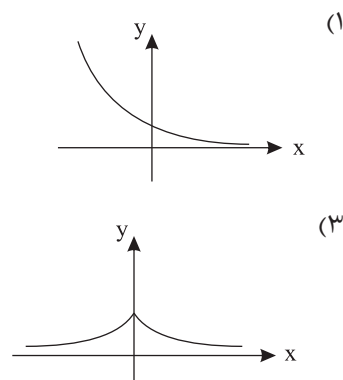
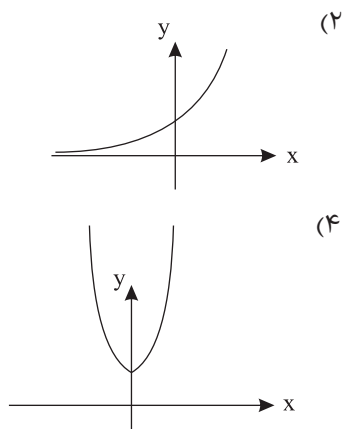
(۴) $\frac{1}{2} \log_3^2$

(۳) $2 \log_2^3$



نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x & ; x \geq 0 \\ (\frac{1}{2})^{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

۲۶



کدام گزینه درست است؟

۲۷

- (۱) لگاریتم اعداد مثبت کمتر از یک، همواره عددی منفی است.
- (۲) تابع لگاریتم $(y = \log_a^x)$ یک به یک نیست.
- (۳) تابع لگاریتم $(y = \log_a^x)$ محور y ها را قطع می کند.
- (۴) اگر نقطه (b, d) روی نمودار $y = a^x$ قرار داشته باشد، آنگاه (d, b) روی نمودار $y = \log_a^x$ قرار دارد.

تساوی داده شده در کدام گزینه درست است؟

۲۸

$$\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{2} = \frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 1 = 1 \quad (۴)$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 1 = 3 \quad (۱)$$

$$\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} = 5 \quad (۳)$$

اگر $a = \log 5$ ، حاصل عبارت $\log 0.002$ بر حسب a کدام است؟

۲۹

$$2 - a \quad (۲)$$

$$-a - 3 \quad (۴)$$

$$-2 - a \quad (۱)$$

$$-4 - a \quad (۳)$$

اگر $\log_x^{(2x+3)} = 2$ ، مقدار $\log_{(x+1)}^{(5x-2)}$ کدام است؟

۳۰

$$2 \quad (۲)$$

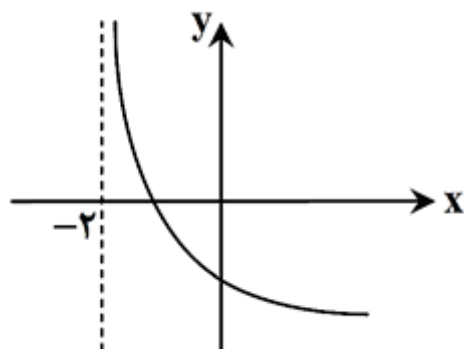
$$4 \quad (۴)$$

$$1 \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

نمودار زیر مربوط به کدام تابع می تواند باشد؟

۳۱



$$y = 2^x - 2 \quad (۱)$$

$$y = \log_v^{(x+2)} \quad (۲)$$

$$y = \log_{\frac{1}{2}}^{(x-2)} \quad (۳)$$

$$y = -\log_v^{(x+2)} \quad (۴)$$

۳۲

نمودار توابع $f(x) = \log_{(m+1)}^x$ و $g(x) = (3 - 2m)^x$ نسبت به خط $y = x$ قرینه هستند. مقدار m کدام است؟

- (۲) $\frac{2}{3}$
(۴) $\frac{3}{4}$

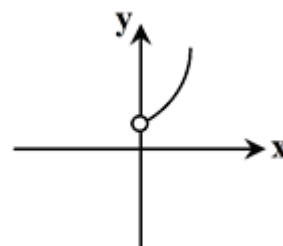
(۱)

(۳) $\frac{3}{4}$

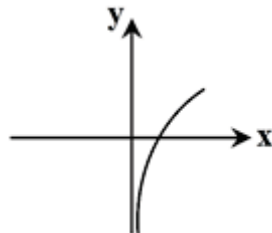
۳۳

نمودار تابع $f(x) = 9^{\log_9^x}$ کدام است؟

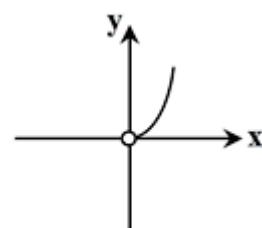
(۱)



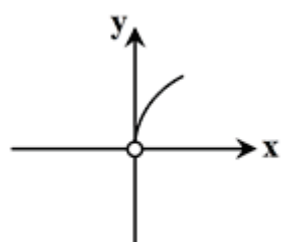
(۲)



(۳)



(۴)



۳۴

جواب معادله $\log x + \log x^2 + \log x^3 + \dots + \log x^{10} = 220$ کدام است؟

(۲) 10^2 (۱) 10 (۴) 10^4 (۳) 10^3 

mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

۳۵

جواب بزرگتر معادله $\log_3^{(1-2x)} + 2 = \log_3^{(10x^2+5)}$ کدام است؟

(۲) 2 (۱) -2 (۴) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{3}$

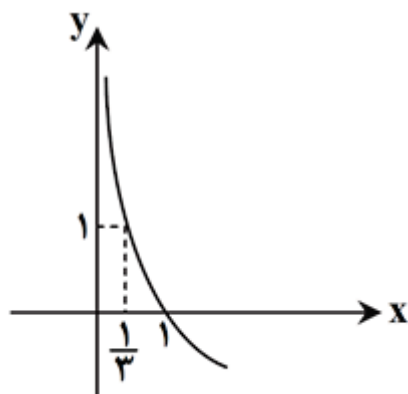
۳۶

با فرض $f(x) = \log_3^{(ax+b)}$ ، اگر $f^{-1}(3) = 7$ و $D_f = (\frac{1}{4}, +\infty)$ ، مقدار $a + b$ کدام است؟

(۲) 2 (۱) 6 (۴) 5 (۳) 3

۳۷

ضابطه تابع زیر کدام می‌تواند باشد؟

(۱) $y = (\frac{1}{3})^x$ (۲) $y = 3^x$ (۳) $y = \log_3^x$ (۴) $y = \log_{\frac{1}{3}}^x$ 

۳۸ برد کدامیک از توابع زیر برابر با $\mathbb{R}$ است؟

$$\begin{array}{ll} (۱) f(x) = x^2 & (۲) g(x) = 2^{-x} \\ (۳) h(x) = \log_{\frac{x}{3}}^{\frac{x}{3}} & (۴) k(x) = \sin x \end{array}$$

۳۹ نمودار تابع $y = \log_a^{(x-2)}$ از نقطه $(\frac{17}{4}, -2)$ عبور می‌کند. مقدار a کدام است؟

$$\begin{array}{ll} (۱) \frac{3}{2} & (۲) \frac{2}{3} \\ (۳) 3 & (۴) \frac{3}{4} \end{array}$$

۴۰ نمودار تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2^x$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

$$\begin{array}{ll} (۱) ۱ & (۲) ۲ \\ (۳) ۳ & (۴) ۴ \end{array}$$

۴۱ اگر $x < y$ ، کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

$$\begin{array}{ll} (۱) 2^{x+1} > 2^{y+1} & (۲) 3^{x-1} > 3^{y-1} \\ (۳) 5^{-x} > 5^{-y} & (۴) \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} > \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2y} \end{array}$$

۴۲ معادله $9^x = 3^{x^2-4x}$ چند ریشه دارد؟

$$\begin{array}{ll} (۱) ۱ & (۲) ۲ \\ (۳) صفر & (۴) بی‌شمار \end{array}$$

۴۳ عدد $\log_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}}$ در کدام بازه قرار دارد؟

$$\begin{array}{ll} (۱) (0, 1) & (۲) (1, 2) \\ (۳) (-1, 0) & (۴) (-2, -1) \end{array}$$

۴۴ اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ ، حاصل $\log \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{2}}$ برحسب a و b کدام است؟

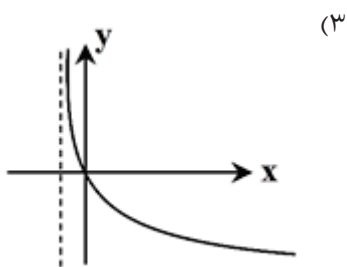
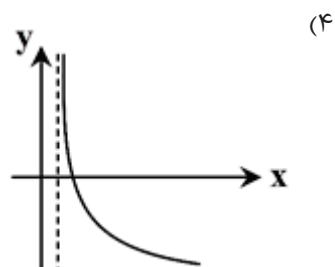
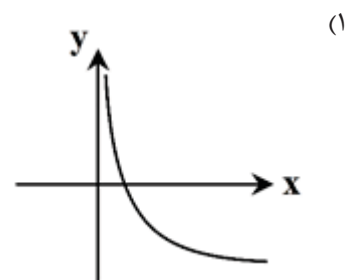
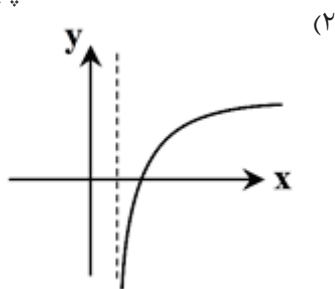
$$\begin{array}{ll} (۱) 1 - 3b - \frac{4a}{3} & (۲) 1 - 4b - \frac{3a}{2} \\ (۳) 1 - 2b - \frac{4a}{3} & (۴) 1 - 4a - \frac{3b}{2} \end{array}$$

۴۵ مجموع ریشه‌های معادله $\log_2^x + 3 \log_x^2 = \log_3^1$ کدام است؟

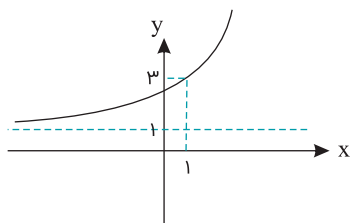
$$\begin{array}{ll} (۱) ۱۰ & (۲) ۸ \\ (۳) ۶ & (۴) ۴ \end{array}$$

۴۶ مجموع ریشه‌های معادله $(2^x - 3^{\log_3^{\Delta}})(4^x - 5^{\log_5^{\Delta}}) = 0$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} (۱) \log_2^{10} & (۲) \log_2^{\Delta \sqrt{3}} \\ (۳) \log_2^{\Delta \sqrt{7}} & (۴) \log_2^{3 \sqrt{7}} \end{array}$$



در دستگاه مختصات زیر، نمودار $f(x) = a + 2^{x-b}$ رسم شده است. مقدار $a + b$ کدام است؟



(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) ۳

(۴) -۲

اگر عدد $(\frac{1}{2})^{a-1}$ کوچکتر از $0/125$ باشد، محدوده a کدام است؟

(۱) $a > 2$

(۲) $a < 4$

(۳) $a > 4$

(۴) $a < 2$

حاصل عبارت $\sqrt{2^{3+\log_2 3}}$ کدام است؟

(۱) $2\sqrt{3}$

(۲) $3\sqrt{3}$

(۳) ۶

(۴) $4\sqrt{3}$

اگر $\log 20 = a$ و $\log 30 = b$ ، مقدار $\log 15$ برحسب a و b کدام است؟

(۱) $2a - b + 2$

(۲) $a + b + 1$

(۳) $2a - b - 1$

(۴) $b - a + 1$

اگر $A = \log \frac{4}{5} + \log \frac{5}{6} + \log \frac{6}{7} + \dots + \log \frac{99}{100}$ و $B = (\log_{15}^6)(\log_{14}^{15}) \dots (\log_2^3)$ حاصل $\frac{A}{B}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{2}$

(۲) -۱

(۳) $-\frac{1}{4}$

(۴) $-\frac{1}{8}$

۵۳

همزمان با افزایش ارتفاع، فشار هوای جو زمین کاهش می‌یابد. اگر بین فشار هوا برحسب پاسکال (P) و ارتفاع برحسب متر (h) رابطه $h = 15500(5 - \log_{10} P)$ برقرار باشد، فشار هوا در ارتفاع ۱۵۵۰۰ متری از سطح زمین چند پاسکال است؟

- (۱) 10^5 (۲) 10^2 (۳) 10^3 (۴) 10^4

۵۴

می‌دانیم رابطه بین میزان بزرگی زلزله (M) در مقیاس ریشتر و مقدار انرژی آزادشده (E) برحسب ارگ از رابطه $\log E = 11/8 + 1/5 M$ به دست می‌آید. اگر انرژی آزادشده زلزله‌ای ۱۰۰۰ برابر انرژی آزادشده زلزله‌ای دیگر باشد، زلزله اول چند ریشتر بیشتر از زلزله دوم است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۵

نیمه‌عمر یک ماده هسته‌ای ۲۵ سال است. جرم نمونه‌ای از آن ۲۴ میلی‌گرم است. بعد از چند سال ۳ میلی‌گرم از آن باقی می‌ماند؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۷۵ (۳) ۶۰ (۴) ۱۵۰

۵۶

اگر بزرگی زلزله‌ای برابر با M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزادشده آن برابر با E در واحد ارگ (Erg) است که از رابطه $\log E = 11/8 + 1/5 M$ به دست می‌آید. اگر یک زلزله ۸ ریشتری رخ دهد، مقدار انرژی آزادشده در آن چند ارگ است؟

- (۱) $10^{23/8}$ (۲) $10^{24/8}$ (۳) $10^{25/8}$ (۴) $10^{22/8}$





mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

گزینه ۴

۱

در حل تست به دو نکته زیر توجه داشته باشید:

الف) دامنه تعریف تابع $y = \log g(x)$ به صورت $g(x) > 0$ است.

ب) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج همواره نامنفی است.

$$y = \log(x-1) \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad (I)$$

$$f(x) = \sqrt{1 - \log(x-1)} \Rightarrow 1 - \log(x-1) \geq 0 \Rightarrow \log(x-1) \leq 1$$

$$\Rightarrow \log(x-1) \leq \log 10 \Rightarrow 0 < x-1 \leq 10 \Rightarrow 1 < x \leq 11 \quad (II)$$

دامنه تعریف تابع اصلی اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) است:

$$(I) \cap (II) : D_f = (1, 11]$$

گزینه ۴

۲

اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با هم مساوی باشند باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$1) D_f = D_g$$

$$2) \forall x \in D_f = D_g \Rightarrow f(x) = g(x)$$

حالا این دو شرط را برای هر زوج تابع $f(x)$ و $g(x)$ در گزینه های داده شده بررسی می کنیم.

بررسی گزینه اول:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \log x \Rightarrow D_f = (0, +\infty) \\ g(x) &= \log x^2 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

بررسی گزینه دوم:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x^2}}{|x|} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ g(x) &= 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

بررسی گزینه سوم:

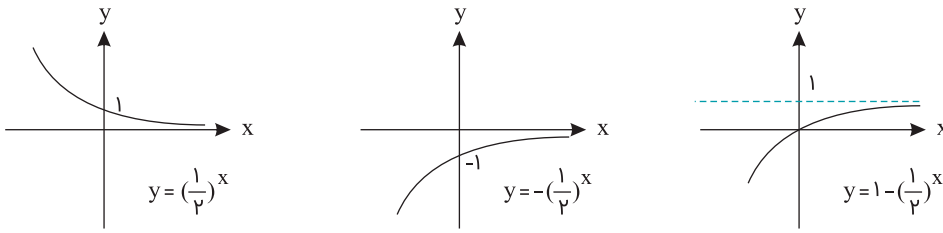
$$\left. \begin{aligned} f(x) &= (\sqrt{x})^2 \Rightarrow D_f = (0, +\infty) \\ g(x) &= x \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

بررسی گزینه چهارم:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{|x|} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ g(x) &= \frac{|x|}{x} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f = D_g$$

هر دو تابع به ازای مقادیر مثبت برابر ۱ و به ازای مقادیر منفی برابر -۱ می شوند، پس برابرند.

ابتدا محدوده تابع $f(x) = 1 - (\frac{1}{p})^x$ را تعیین کنید (بهترین شیوه رسم شکل است). سپس دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ را به دست می آوریم. نمودار تابع $f(x) = 1 - (\frac{1}{p})^x$ را رسم می کنیم:



عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد. داریم:

$$y = \sqrt{xf(x)} \Rightarrow xf(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x, f(x) \geq 0 \\ x, f(x) < 0 \end{cases} \quad (x \text{ و } f(x) \text{ باید هم علامت باشند})$$

با توجه به نمودار تابع $f(x) = 1 - (\frac{1}{p})^x$ ، هر جا که x مثبت است، $f(x)$ هم مثبت است و هر جا که x منفی است، $f(x)$ هم منفی است. بنابراین دامنه تعریف تابع به صورت $(-\infty, +\infty)$ در می آید.



گام اول

الف) عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد پس $ax + b > 0$ بوده و $x > -\frac{b}{a}$ می شود. از طریق مقایسه با مقادیر قابل قبول برای x رابطه بین a و b مشخص می شود.

ب) $f(4) = 2$ است. با حل دو معادله و دو مجهول داده شده مقادیر a و b مشخص شده و در نهایت $f(-\frac{4}{9})$ حساب می شود.

گام دوم

$$x > -\frac{b}{a}, x \in (-\frac{1}{p}, +\infty) \Rightarrow -\frac{b}{a} = -\frac{1}{p} \Rightarrow a = 2b \quad (I)$$

$$f(4) = 2 \Rightarrow \log_3^{(4a+b)} = 2 \Rightarrow 4a + b = 3^2 = 9 \Rightarrow 4a + b = 9$$

$$\xrightarrow{(I)} 4(2b) + b = 9 \Rightarrow 8b + b = 9 \Rightarrow 9b = 9 \Rightarrow b = 1 \xrightarrow{(I)} a = 2$$

پس ضابطه تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = \log_3^{(2x+1)}$ به دست آمد. حالا $f(-\frac{4}{9})$ را محاسبه می کنیم:

$$f(-\frac{4}{9}) = \log_3^{(-\frac{4}{9}+1)} = \log_3^{\frac{1}{9}} = \log_3^{3^{-2}} = -2 \log_3 3 = -2$$

یک رابطه فوق العاده مهم در مبحث لگاریتم وجود دارد که قبل از حل سؤال، ابتدا آن را بیان می کنیم:

$$\log 10 = 1 \Rightarrow \log 2 \times 5 = 1 \Rightarrow \log 2 + \log 5 = 1$$

پس همواره به خاطر داشته باشید که مجموع $\log 2$ و $\log 5$ برابر یک است. یعنی اگر در سؤالی یکی از این دو مورد داده شد، دیگری را هم به صورت غیر مستقیم به ما داده اند.

$$\begin{aligned} \log \sqrt[3]{1/6} &= \log \sqrt[3]{\frac{16}{10}} = \log \sqrt[3]{\frac{2^4}{2 \times 5}} = \log \frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \log 2 - \log \sqrt[3]{5} = \log 2 - \log 5^{\frac{1}{3}} \\ &= \log 2 - \frac{1}{3} \log 5 \xrightarrow[\log 2 = 1 - 3k]{\log 5 = 3k} \log \sqrt[3]{1/6} = 1 - 3k - \frac{1}{3}(3k) = 1 - 3k - k = 1 - 4k \end{aligned}$$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

گام اول

الف) عبارت جلوی لگاریتم باید همواره مثبت باشد.
ب) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج، باید نامنفی باشد.

گام دوم

باتوجه به دو قسمت گام اول، مجموعه جواب را به دست آورده و بین آن ها اشتراک می گیریم.

$$I) \quad x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x - 3) > 0 \Rightarrow x > 3 \quad \text{یا} \quad x < 0$$

$$II) \quad 1 - \log(x^2 - 3x) \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \log(x^2 - 3x) \Rightarrow \log 10 \geq \log(x^2 - 3x)$$

$$\Rightarrow 10 \geq x^2 - 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 10 \leq 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 5$$

اشتراک دو مجموعه جواب به دست آمده برابر $[-2, 0) \cup (3, 5]$ است.

$$y = \sqrt{f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)} = \sqrt{2^{\frac{1}{x}} - 2^x}$$

برای یافتن دامنه تعریف تابع به صورت زیر عمل می کنیم:

$$2^{\frac{1}{x}} - 2^x \geq 0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} \geq 2^x$$

اگر از طرفین لگاریتم در مبنای ۲ بگیریم، داریم:

$$\frac{1}{x} \geq x \Rightarrow x - \frac{1}{x} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} \leq 0$$

x	-1	0	1
$\frac{x^2-1}{x}$	-	+	-

پس دامنه تعریف تابع عبارت است از: $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$

گام اول

معادلات نمایی و لگاریتمی را به صورت ساده شده می نویسیم (از معادله لگاریتمی y را بر حسب x به دست می آوریم) با حل دستگاه دومعادله و دومجهول حاصل x و y را تعیین می کنیم.

گام دوم

$$\log y = 2 \log 3 + \log x \Rightarrow \log y = \log 3^2 + \log x$$

$$\Rightarrow \log y = \log 9x \Rightarrow y = 9x \quad (1)$$

$$2^{x-7} \times 4^{x+y} = 1 \Rightarrow 2^{x-7} \times (2^2)^{x+y} = 1 \Rightarrow 2^{x-7} \times 2^{2x+2y} = 1$$

$$\Rightarrow 2^{3x+2y-7} = 1 = 2^0 \Rightarrow 3x + 2y - 7 = 0 \xrightarrow{(1)} 3x + 18x - 7 = 0$$

$$\Rightarrow 21x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

$$y = 9x \Rightarrow y = 9 \times \frac{1}{3} = 3$$

گزینه ۳

۹

گام اول

مختصات دو نقطه $(2, 6)$ و $(12, 10)$ در ضابطه تابع صدق می کند؛ بنابراین مختصات این دو نقطه را در ضابطه تابع جایگذاری کرده و مقادیر a و b را تعیین می کنیم.

گام دوم

$$f(2) = 6 \Rightarrow a + \log_2(2^b - 4) = 6 \Rightarrow \log_2(2^b - 4) = 6 - a$$

$$\Rightarrow 2^{6-a} = 2^b - 4 \quad (1)$$

$$f(12) = 10 \Rightarrow a + \log_2(12^b - 4) = 10 \Rightarrow \log_2(12^b - 4) = 10 - a$$

$$\Rightarrow 12^b - 4 = 2^{10-a} \quad (2)$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می کنیم؛ بنابراین می توان نوشت:

$$\frac{2^{6-a}}{2^{10-a}} = \frac{2^b - 4}{12^b - 4} \Rightarrow 2^{-4} = \frac{2^b - 4}{12^b - 4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16} = \frac{2(b-2)}{4(3^b-1)} \Rightarrow 3^b - 1 = 8(b-2) \Rightarrow 3^b - 1 = 8b - 16$$

$$\Rightarrow 8b = 15 \Rightarrow b = 3 \xrightarrow{(2)} 2^{10-a} = 3^3 = 2^5 \Rightarrow 10 - a = 5 \Rightarrow a = 5$$

دو تابع در نقطه A متقاطع هستند؛ بنابراین در این نقطه با یکدیگر برخورد می‌کنند. با مساوی قرار دادن ضابطه دو تابع نقطه برخورد را تعیین می‌کنیم.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{3x} = 3^x + \frac{\lambda}{3} \Rightarrow (3^{-\frac{1}{3}})^{3x} = 3^x + \frac{\lambda}{3}$$

$$\Rightarrow 3^{-x} = 3^x + \frac{\lambda}{3} \xrightarrow{3^{-x}=t} t = \frac{1}{t} + \frac{\lambda}{3} \xrightarrow{\times t} t^2 = 1 + \frac{\lambda}{3}t$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3t^2 = 3 + \lambda t \Rightarrow 3t^2 - \lambda t - 3 = 0$$

$$\Delta = (-\lambda)^2 - 4(3)(-3) = \lambda^2 + 36 = 100$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{\lambda + 10}{6} = \frac{1\lambda}{6} = 3 \Rightarrow 3^{-x} = 3 \Rightarrow x = -1 \\ t_2 = \frac{\lambda - 10}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 3^{-1} + \frac{\lambda}{3} = \frac{1}{3} + \frac{\lambda}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

بنابراین نقطه برخورد دو تابع نقطه A(-1, 3) است.
فاصله نقطه (-1, 3) از نقطه (-1, 1) برابر با 3 - 1 = 2 است.

ابتدا ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = 4 - e^{3x} \Rightarrow e^{3x} = 4 - y \Rightarrow \ln e^{3x} = \ln(4 - y)$$

$$\Rightarrow 3x \ln e = \ln(4 - y) \Rightarrow 3x = \ln(4 - y) \Rightarrow x = \frac{1}{3} \ln(4 - y)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \ln(4 - x)$$

بنابراین داریم:

$$g(x) = \sqrt{xf^{-1}(x)} \Rightarrow xf^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \frac{1}{3} \ln(4 - x) \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln(4 - x) = 0 \Rightarrow 4 - x = 1 \Rightarrow x = 3 \\ 4 - x > 0 \Rightarrow \underline{x < 4} \end{cases}$$

x	0	3	4
$x \times \frac{1}{3} \ln(4 - x)$	$-$	$+$	$-$

در نتیجه: $D = [0, 3]$

چون تابع از دو نقطه $(5, 11)$ و $(21, 15)$ می‌گذرد، بنابراین مختصات این نقاط در تابع صدق می‌کند، داریم:

$$\begin{aligned} (5, 11) \in f &\Rightarrow 11 = a + \log_v^{(15+b)^v} \\ (21, 15) \in f &\Rightarrow 15 = a + \log_v^{(6^3+b)^v} \\ \begin{cases} 11 = a + \log_v^{(15+b)^v} \\ 15 = a + \log_v^{(6^3+b)^v} \end{cases} &\Rightarrow \times (-1) \begin{cases} -11 + a = -\log_v^{(15+b)^v} \\ 15 - a = \log_v^{(6^3+b)^v} \end{cases} \\ \Rightarrow 2 = \log_v^{(6^3+b)^v} - \log_v^{(15+b)^v} &\Rightarrow 2 = 2 \log_v^{(6^3+b)} - 2 \log_v^{(15+b)} \\ \Rightarrow 2 = 2(\log_v^{(6^3+b)} - \log_v^{(15+b)}) &\Rightarrow 2 = \log_v^{\frac{6^3+b}{15+b}} \Rightarrow \frac{6^3+b}{15+b} = 2 \\ \Rightarrow 6^3 + b = 6 \cdot 0 + 2b &\Rightarrow 3b = 3 \Rightarrow b = 1 \\ 11 = a + \log_v^{(15+b)^v} &\xrightarrow{b=1} 11 = a + \log_v^{(16)^v} \\ \Rightarrow 11 - a = 16 &\Rightarrow a = 3 \end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن ضابطه‌های دو تابع مختصات نقطه تقاطع یعنی نقطه A را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(x) = 2^x \\ g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{3}{2} \end{cases} \\ \Rightarrow 2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{3}{2} &\Rightarrow 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{3}{2} \xrightarrow{(*)} x = \frac{1}{2} \\ \xrightarrow{\text{جایگذاری در یکی از توابع}} y = 2 &\Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 2\right) \\ \Rightarrow \text{فاصله} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (2 - 1)^2} &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

حل معادله (*):

$$\begin{aligned} 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x &= \frac{3}{2}, \quad a = 2^x \\ \Rightarrow a - \frac{1}{a} &= \frac{3}{2} \Rightarrow a^2 - \frac{3}{2}a - 1 = 0 \Rightarrow (a - 2)\left(a + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^{2x+y} &= 9 \times 3^{x-y} \Rightarrow 3^{2x+y} = 3^{2+x-y} \Rightarrow 2x + y = 2 + x - y \Rightarrow 2y = 2 - x \quad (1) \\ \log(x + 2y) &= 1 + \log y \Rightarrow \log(x + 2y) - \log y = \log 10 \\ \log \frac{(x + 2y)}{y} &= \log 10 \Rightarrow \frac{x + 2y}{y} = 10 \Rightarrow x + 2y = 10y \quad (2) \\ \xrightarrow{(2)} x + 2y &= 10 \times (2y) \xrightarrow{(1)} x + 2 - x = 10(2 - x) \Rightarrow x = \frac{1}{8} = 1/8 \end{aligned}$$



$$\log_a^x \geq \log_a^y \Rightarrow \begin{cases} a > 1 & ; x \geq y \\ 0 < a < 1 & ; x \leq y \end{cases} \text{ نکته:}$$

نکته: دامنه تابع $\log_a^{u(x)}$ عبارت است از: $\{x \in D_u : u(x) > 0\}$ باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 2x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2} \\ x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases} (*)$$

همچنین باید زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$\log_2^{(2x-3)} + \log_2^{(x-1)} \geq 0 \Rightarrow \log_2^{(2x-3)} - \log_2^{(x-1)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \log_2^{(2x-3)} \geq \log_2^{(x-1)} \xrightarrow{\text{مبنا بزرگتر از ۱ است}} 2x - 3 \geq x - 1 \Rightarrow x \geq 2 \quad (**)$$

از اشتراک (*) و (**) داریم: $x \geq 2$

نکته: برای محاسبه ضابطه وارون یک تابع، باید x را بر حسب y به دست آوریم و سپس جای x و y را عوض کنیم.

$$\text{نکته: } \log_a^x = b \text{ اگر و تنها اگر } x = a^b$$

باتوجه به نکات بالا داریم:

$$y = 5 + \log_2^x \Rightarrow y - 5 = \log_2^x \Rightarrow x = 2^{y-5}$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم}} y = 2^{x-5} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2^{x-5}$$

نکته: دامنه تابع $\log u(x)$ عبارت است از: $\{x \in D_u : u(x) > 0\}$

تنها حالتی که جواب نامعادله $ax^2 + bx + 3 > 0$ به صورت $(-\infty, 2)$ می‌شود، حالتی است که این عبارت درجه یک باشد. بنابراین $a = 0$

همچنین باید $x = 2$ ریشه معادله $bx + 3 = 0$ باشد، در نتیجه $b = -\frac{3}{2}$.

$$\text{بنابراین: } a + b = -\frac{3}{2}$$

نکته: دامنه تابع $y = \log u(x)$ عبارت است از:

$$\{x \in D_u | u(x) > 0\}$$

باتوجه به نکته بالا، دامنه $f(x)$ ، مجموعه همه x هایی است که به ازای آن‌ها $\frac{ax+6}{x+b} > 0$ باشد. طبق قاعده تعیین علامت، علامت $\frac{ax+6}{x+b}$ بین ریشه‌های صورت و مخرج مخالف علامت a و خارج ریشه‌ها موافق علامت a است، اما طبق فرض، دامنه این تابع بازه محدود $(-2, 3)$ است؛ بنابراین -2 و 3 ریشه‌های صورت و مخرج عبارت $\frac{ax+6}{x+b}$ هستند و علامت a منفی است (زیرا عبارت بین دو ریشه مثبت شده است) در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} \text{ریشه صورت } -2: -2a + 6 = 0 \Rightarrow a = 3 > 0 \quad \times \\ \text{ریشه صورت } 3: 3a + 6 = 0 \Rightarrow a = -2 < 0 \quad \checkmark \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{ریشه مخرج } -2} -2 + b = 0 \Rightarrow b = 2$$

حال محل تقاطع $f(x) = \log \frac{-2x+6}{x+2}$ و خط $y = 1$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \log \frac{-2x+6}{x+2} = 1 \Rightarrow \frac{-2x+6}{x+2} = 10 \Rightarrow -2x+6 = 10x+20$$

$$\Rightarrow 12x = -14 \Rightarrow x = \frac{-7}{6}$$

$$g(x) = 5^x + \frac{1}{x} \Rightarrow g(x) > \frac{1}{x}$$

حال برای محاسبه دامنه تابع f داریم:

$$x^3 g(x) \geq 0 \xrightarrow{g(x) > 0} x \geq 0$$

بنابراین دامنه تابع f ، بازه $[0, +\infty)$ است.

نکته: دامنه تابع $y = \log_a^{u(x)}$ عبارت است از:

$$\{x \in D_u | u(x) > 0\}$$

نکته: به ازای هر $x \in D_f$ داریم $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ و به ازای هر $x \in D_{f^{-1}} = R_f$ داریم: $(f \circ f^{-1})(x) = x$

$$f(x) = \log_f^{(1-x)} \Rightarrow D_f = (-\infty, 2)$$

$$y = (f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad x \in (-\infty, 2)$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

نکته: دامنه تابع $\log_a^{u(x)}$ عبارت است از: $\{x \in D_{u(x)} | u(x) > 0\}$

$$D_g = \{x \in D_{\log_v^{(1-x)}} | \log_v^{(1-x)} \in D_f\} = \{1-x > 0 | -2 \leq \log_v^{(1-x)} \leq 3\}$$

$$= \{x < 1 | \frac{1}{v} \leq 1-x \leq 8\} = \{x < 1 | -7 \leq x \leq \frac{3}{v}\} = [-7, \frac{3}{v}]$$

بنابراین دامنه تابع موردنظر شامل ۸ عدد صحیح است.

نکته:

$$\ln a + \ln b = \ln ab$$

$$\ln a^n = n \ln a$$

ابتدا می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \ln(2x - 3) + 3 \ln(x - 1) &= \ln 24 \Rightarrow \ln(2x - 3) + \ln(x - 1) = \ln 24 \\ \Rightarrow \ln(2x - 3)(x - 1) &= \ln 24 \\ \Rightarrow (2x - 3)(x - 1) &= 24 \Rightarrow 2x^2 - 19x + 3 = 24 \Rightarrow 2x^2 - 19x = 0 \end{aligned}$$

حال با جایگذاری مقدار $2x^2 - 19x = 0$ در عبارت موردنظر داریم:

$$\ln(2x^2 - 19x + \sqrt{e}) = \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$$

نکته:

$$\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a$$

ابتدا از شرط $\log a = a$ نتیجه می‌شود:

$$2 \log 3 = a \Rightarrow \log 3 = \frac{a}{2} \quad (*)$$

حال توجه کنید که داریم:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{3\sqrt{243}} = \sqrt[3]{3 \times 3^5} = \sqrt[3]{3^6} = 3^2 \\ 0.001 = 10^{-3} \end{cases}$$

پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \log_{0.001} \sqrt[3]{3\sqrt{243}} &= \log_{10^{-3}} 3^2 = -\frac{2}{3} \log_{10} 3 \\ \xrightarrow{(*)} -\frac{2}{3} \log_{10} 3 &= -\frac{2}{3} \left(\frac{a}{2} \right) = -\frac{a}{3} \end{aligned}$$

نکته:

$$\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a, \quad \log_a a = 1$$

ابتدا مقدار $a = \log_3^9 \sqrt[3]{3}$ را به دست می‌آوریم:

$$a = \log_3^9 \sqrt[3]{3} = \log_{3 \times 3 \times 3}^{3^9 \times 3^{\frac{1}{3}}} = \log_{3^9}^{3^{\frac{28}{3}}} = \frac{\frac{28}{3}}{9} \log_3 3 = \frac{28}{27}$$

حال مقدار $\log_{\sqrt{2}}^{(5a+9)}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt{2}}^{(5a+9)} = \log_{\sqrt{2}}^{(5 \times \frac{28}{27} + 9)} = \log_{\sqrt{2}}^{16} = \log_{2^{\frac{1}{2}}}^{2^4} = \frac{4}{\frac{1}{2}} \log_2 2 = 8$$

راه حل اول:

نکته:

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

نکته:

$$\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

$$f^{\log a} = b^{\log w} \Rightarrow f^{\log a} = w^{\log b} \Rightarrow f^{\frac{\log a}{\log w}} = w^{\frac{\log b}{\log w}} \Rightarrow f = w^{\log_a b}$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین در مبنای ۳ لگاریتم می‌گیریم}} \log_w^f = \log_a^b \times \log_w^w \Rightarrow \log_a^b = \log_w^f = 2 \log_w^3$$

راه حل دوم:

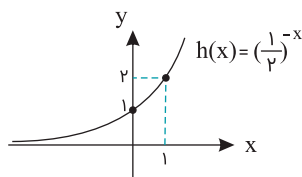
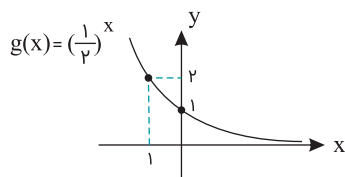
فرض کنیم $\log_a^b = t$, در این صورت $b = a^t$. با جایگذاری این مقدار در عبارت $f^{\log a} = b^{\log w}$ داریم:

$$f^{\log a} = (a^t)^{\log w} \Rightarrow f^{\log a} = w^{\log a^t} \Rightarrow f^{\log a} = w^{t \log a} \Rightarrow f^{\log a} = (w^t)^{\log a} \Rightarrow w^t = f$$

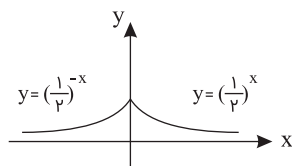
$$\Rightarrow t = \log_w^f = 2 \log_w^3 \Rightarrow \log_a^b = 2 \log_w^3$$



ابتدا به نمودار هریک از توابع $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ و $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2^x$ دقت کنید:



حال باتوجه به ضابطه تابع $f(x)$ ، نمودار آن به صورت زیر است:



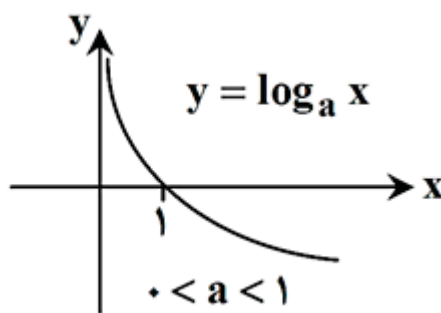
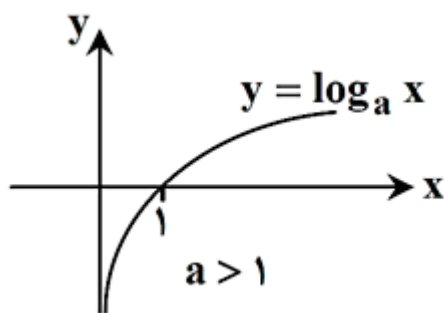
بنابراین گزینه "۳" پاسخ است.

نکته: $y = \log_a^x \Leftrightarrow a^y = x$ ($x, a > 0, a \neq 1$)

تک تک گزینه ها را بررسی می کنیم:

گزینه ۱: نادرست است. به این مثال نقض دقت کنید: $\log_{0.5}^{0.5} = 1 > 0$

گزینه ۲: نادرست است. تابع لگاریتم یک تابع یک به یک است. به نمودارهای زیر دقت کنید:



گزینه ۳: نادرست است. مطابق تعریف $y = \log_a^x$ باید عددی مثبت باشد و نمی تواند صفر باشد؛ بنابراین این تابع محور y را قطع نمی کند.

گزینه ۴: درست است. نقطه (b, d) روی نمودار $y = a^x$ قرار دارد، پس $d = a^b$. طبق نکته $b = \log_a^d$ پس (d, b) روی نمودار $y = \log_a^x$ قرار دارد.

نکته:

$$\log_a^a = 1, \log_a^{b^n} = n \log_a^b, \log_a^1 = 0; (a, b > 0, a \neq 1, n \in \mathbb{N})$$

$$1 \text{ گزینه } 1: \log_{\frac{1}{27}}^{\frac{1}{27}} = \log_{\frac{1}{27}}^{\frac{1}{3^3}} = \log_{3^{-3}}^{3^{-3}} = -3 \log_3^3 = -3 \times$$

$$2 \text{ گزینه } 2: \log_{\sqrt[3]{27}}^{\sqrt[3]{27}} = \log_{\sqrt[3]{3^3}}^{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{1}{3} \log_3^3 = \frac{1}{3} \checkmark$$

$$3 \text{ گزینه } 3: \log_{\frac{1}{27}}^{\frac{1}{27}} = \log_{\frac{1}{27}}^{\frac{1}{3^3}} = \log_{3^{-3}}^{3^{-3}} = \log_{\frac{1}{3}}^{(\frac{1}{3})^{-3}} = -3 \log_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} = -3 \times$$

$$4 \text{ گزینه } 4: \log_{\frac{1}{27}}^{\frac{1}{27}} = 0 \times$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

نکته:

$$(a, b, c > 0, c \neq 1) \quad \log_c^b = \log_c^a - \log_c^b$$

اگر $2/5$ را به صورت کسر بنویسیم، داریم:

$$\begin{aligned} \log_{2/5} 2 &= \log_{1/5} 2 = \log 2 - \log 1/5 = \log \frac{2}{1/5} - \log 1/5 \\ &= \log 10 - \log 5 - \log 1/5 \xrightarrow{\log 5=a} \log 2/5 = 1 - a - 3 = -2 - a \end{aligned}$$

نکته ۱:

$$y = \log_a^x \Leftrightarrow a^y = x; (x, a > 0, a \neq 1)$$

نکته ۲:

$$\log_a^{b^n} = n \log_a^b; (b, a > 0, a \neq 1)$$

باتوجه به نکته ۱ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \log_x^{(2x+3)} &= 2 \Rightarrow x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \\ \Rightarrow (x-3)(x+1) &= 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -1 \end{aligned}$$

مقدار $x = -1$ قابل قبول نیست، زیرا پایه لگاریتم باید مثبت باشد؛ پس به ازای $x = 3$ داریم:

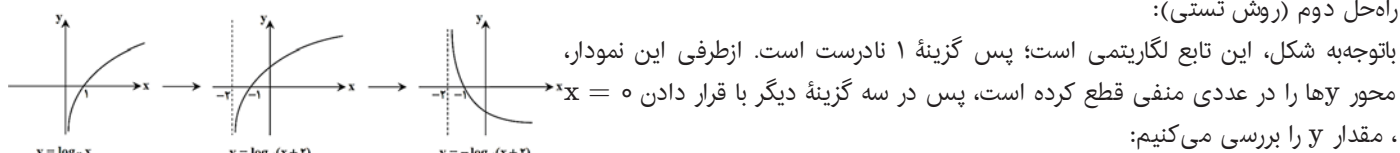
$$\log_{(x+1)}^{(2x-2)} \xrightarrow{x=3} \log_4^2 = \log_4^{2^2} = 2 \log_4^2 = 2$$

راه حل اول:

نکته: نمودار $y = -f(x)$ قرینه نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور x ها است.

نکته: با فرض $a > 0$ ، برای رسم نمودار $y = f(x-a)$ یا $y = f(x+a)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را به اندازه a واحد به سمت راست (چپ) انتقال می‌دهیم.

نمودار مورد نظر، نمودار یک تابع لگاریتمی است که ۲ واحد به سمت چپ منتقل شده و سپس نسبت به محور x ها قرینه شده است. به نمودارهای زیر دقت کنید:



$$\text{گزینه ۲: } y = \log_2^{(0+2)} = 1 \quad \times$$

$$\text{گزینه ۳: } y = \log_2^{(0-2)} = \log_2^{-2} \quad \times \text{ (تعریف نشده)}$$

$$\text{گزینه ۴: } y = -\log_2^{(0+2)} = -1 \quad \checkmark$$

بنابراین گزینه ۴ می‌تواند ضابطه این تابع باشد.

نکته: اگر a عددی مثبت و مخالف یک باشد، تابع نمایی $f(x) = a^x$ یک به یک است و از این رو دارای وارون $f^{-1}(x)$ است که تابع لگاریتمی پایه a نامیده می‌شود و با نماد $y = \log_a^x$ نشان داده می‌شود.

نکته: اگر توابع f و f^{-1} معکوس یکدیگر باشند، نمودار آنها نسبت به خط $y = x$ قرینه است.
نکته:

$$y = \log_a^x \Leftrightarrow a^y = x ; (x, a > 0, a \neq 1)$$

باتوجه به فرض سؤال، این دو تابع نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند، پس مطابق نکات وارون یکدیگر هستند؛ بنابراین:

$$3 - 2m = m + 1 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$$

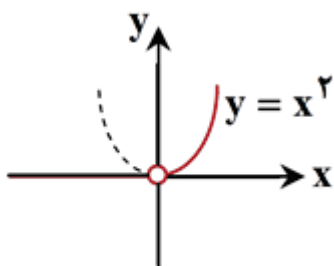
نکته:

$$\log_b^a = n \log_b^a, b^{\log_b^a} = a ; (b \neq 1, a, b > 0)$$

ابتدا باتوجه به نکته، تابع داده شده را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = 9^{\log_9^x} = (3^2)^{\log_9^x} = 3^{2 \log_9^x} = 3^{\log_9^{x^2}} = x^2$$

دامنه تابع $f(x)$ به صورت $D_f = (0, +\infty)$ است؛ بنابراین نمودار این تابع، نمودار تابع $f(x) = x^2$ در بازه $(0, +\infty)$ است:



نکته ۱:

$$y = \log_a^x \Leftrightarrow a^y = x ; (x, a > 0, a \neq 1)$$

نکته ۲:

$$\log_a^{b^n} = n \log_a^b ; (b, a > 0, a \neq 1)$$

نکته: اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ ، آنگاه از تساوی $\log_a^x = \log_a^y$ می‌توان نتیجه گرفت که $x = y$ و برعکس؛ یعنی اگر $x, y > 0$ و $x = y$ ، آنگاه:

$$\log_a^x = \log_a^y$$

نکته ۳:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

باتوجه به نکات داریم:

$$\log x + \log x^2 + \log x^3 + \dots + \log x^{10} = 220$$

$$\Rightarrow \log x + 2 \log x + 3 \log x + \dots + 10 \log x = 220$$

$$\Rightarrow (1 + 2 + \dots + 10) \log x = 220 \Rightarrow \frac{10 \times 11}{2} \log x = 220$$

$$\Rightarrow 55 \log x = 220 \Rightarrow \log x = \frac{220}{55} = 4 \Rightarrow x = 10^4$$

نکته:

$$\log_a^{a^n} = n, \log_c^a + \log_c^b = \log_c^{ab}$$

باتوجه به نکته بالا داریم:

$$\log_{10}^{(1-2x)} + 2 = \log_{10}^{(10x^2+5)} \Rightarrow \log_{10}^{(1-2x)} + \log_{10}^{100} = \log_{10}^{(10x^2+5)} \Rightarrow \log_{10}^{((1-2x) \times 100)} = \log_{10}^{(10x^2+5)}$$

$$\Rightarrow 9 - 18x = 10x^2 + 5 \Rightarrow 10x^2 + 18x - 4 = 0 \Rightarrow 5x^2 + 9x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 181 - 4 \times 5 \times (-2) = 121 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-9 \pm 11}{10} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{5}$$

هر دو جواب قابل قبول است، پس جواب بزرگتر معادله برابر با $\frac{1}{5}$ است.



- نکته ۱: اگر تابع f وارون پذیر باشد و $f(a) = b$ ، آنگاه: $f^{-1}(b) = a$
- نکته ۲: شرط تعریف تابع $y = \log_b^a$ ، $a > 0$ ، $b > 0$ و $b \neq 1$ است.
- نکته ۳: جدول تعیین علامت تابع خطی $y = ax + b$ به صورت زیر است:

x	$-\frac{b}{a}$
$ax + b$	مخالف علامت a موافق علامت a

مطابق نکته ۱ داریم:

$$f^{-1}(3) = 7 \Rightarrow f(7) = 3 \Rightarrow \log_3^{(7a+b)} = 3 \Rightarrow 7a + b = 3^3 \Rightarrow 7a + b = 27 \quad (*)$$

از طرفی مطابق صورت سؤال، دامنه این تابع به صورت $(\frac{1}{4}, +\infty)$ است. با استفاده از نکات ۲ و ۳ داریم:

x	$\frac{1}{4}$
$ax + b$	- +

در نتیجه مقدار $ax + b$ به ازای $x = \frac{1}{4}$ صفر است؛ بنابراین داریم:

$$a \times \frac{1}{4} + b = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a + b = 0 \quad (**)$$

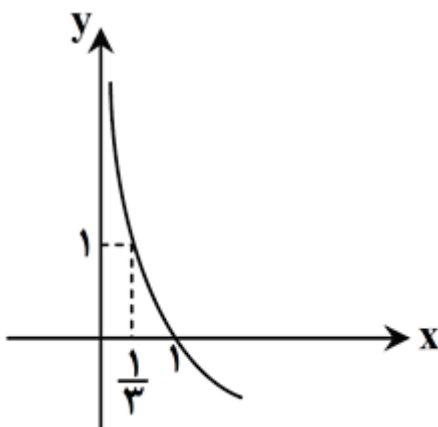
با حل دستگاه شامل معادلات (*) و (**) داریم:

$$\begin{cases} 7a + b = 27 \\ \frac{1}{4}a + b = 0 \end{cases}$$

$$\frac{27a}{4} = 27 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a + b = 3$$

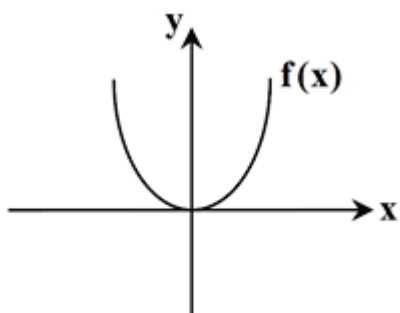
نکته: $\log_a^a = 1$ ، $\log_a^1 = 0$

نمودار تابع از نقطه $(1, 0)$ عبور می کند، پس گزینه های ۱ و ۲ رد می شوند. نمودار تابع از نقطه $(\frac{1}{3}, 1)$ هم عبور می کند، پس گزینه ۳ هم رد می شود؛ بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

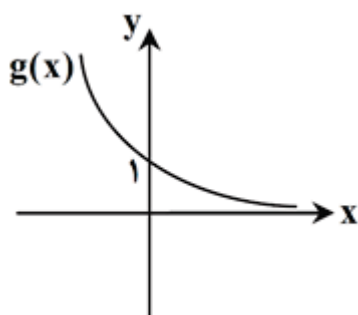




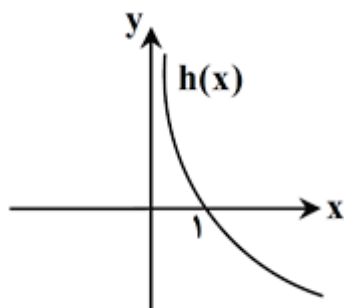
به کمک رسم نمودار، برد هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:
گزینه ۱: برد تابع $f(x) = x^2$ برابر با $[0, +\infty)$ است.



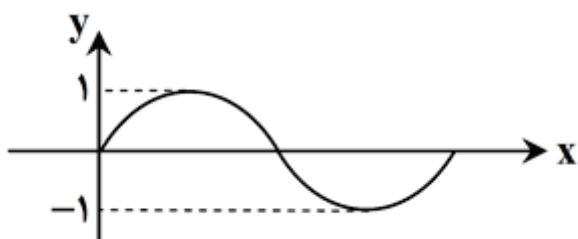
گزینه ۲: برد تابع $g(x) = 2^{-x} = (\frac{1}{2})^x$ برابر با $(0, +\infty)$ است.



گزینه ۳: برد تابع $h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ برابر با $\mathbb{R}$ است.



گزینه ۴: برد تابع $k(x) = \sin x$ برابر با $[-1, 1]$ است.



بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

نکته: با فرض $a, b > 0$ و $a \neq 1$ داریم:

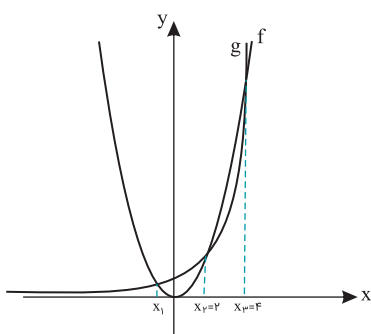
$$\log_b^a = x \Leftrightarrow a = b^x$$

نمودار تابع $y = \log_a^{(x-2)}$ از نقطه $(\frac{17}{4}, -2)$ عبور می‌کند، پس مختصات این نقطه در ضابطه تابع صدق می‌کند.

$$y = \log_a^{(x-2)} \xrightarrow[y=-2]{x=\frac{17}{4}} -2 = \log_a^{(\frac{17}{4}-2)} \Rightarrow a^{-2} = \frac{17}{4} - 2 = \frac{9}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \pm \frac{2}{3}$$

چون a در مبنای لگاریتم قرار دارد، نمی‌تواند منفی باشد؛ بنابراین فقط $a = \frac{2}{3}$ قابل قبول است.

نمودار دو تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2^x$ در شکل زیر رسم شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید نمودار این دو تابع در ۳ نقطه ($-1 < x_1 < 0$ ، $x_2 = 2$ و $x_3 = 4$) یکدیگر را قطع می‌کنند.



نکته: اگر $a > 1$ ، از شرط $x < y$ نتیجه می‌شود: $a^x < a^y$

نکته: اگر $0 < a < 1$ ، از شرط $x < y$ نتیجه می‌شود: $a^x > a^y$

باتوجه به نکات بالا هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: $x < y \Rightarrow x + 1 < y + 1 \xrightarrow{2>1} 2^{x+1} < 2^{y+1}$ ×

گزینه ۲: $x < y \Rightarrow x - 1 < y - 1 \xrightarrow{3>1} 3^{x-1} < 3^{y-1}$ ×

گزینه ۳: $x < y \Rightarrow -y < -x \xrightarrow{5>1} 5^{-y} < 5^{-x}$ ✓

گزینه ۴: $x < y \Rightarrow 2x < 2y \xrightarrow{\frac{2}{\sqrt{3}}>1} (\frac{2}{\sqrt{3}})^{2x} < (\frac{2}{\sqrt{3}})^{2y}$ ×

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

نکته: با فرض $a > 0$ و $a \neq 1$ داریم:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

با استفاده از نکته بالا داریم:

$$9^x = 3^{x^2-4x} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{x^2-4x} \Rightarrow x^2 - 4x = 2x \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x-6) = 0 \Rightarrow x = 0, 6$$

هر دو جواب قابل قبول‌اند، پس معادله ۲ ریشه دارد.

نکته: اگر $a > 1$ ، از شرط $x < y$ نتیجه می‌شود: $\log_a^x < \log_a^y$
 نکته: اگر $0 < a < 1$ ، از شرط $x < y$ نتیجه می‌شود: $\log_a^x > \log_a^y$

$$1 < 1/5 < 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^0 < 1/5 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Rightarrow 0 > \log_{\frac{1}{2}}^{1/5} > -1 \\ \Rightarrow -1 < \log_{5/10}^{1/5} < 0 \Rightarrow \log_{5/10}^{1/5} \in (-1, 0)$$

نکته:

$$\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b, \log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b, \log_b^{a^n} = n \log_b^a$$

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\log \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{2}} = \log \sqrt{75} - \log \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log 75 - \log \sqrt{2} \\ = \frac{1}{2} \log (5^2 \times 3) - \log (2^{1/2}) = \frac{1}{2} (2 \log 5 + \log 3) - (\frac{1}{2} \log 2) \\ = \frac{1}{2} (2(1 - \log 2) + \log 3) - (\frac{1}{2} \log 2) \\ = \frac{1}{2} (2(1 - a) + b) - (\frac{1}{2} a) = 1 - a + \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = 1 - \frac{3a}{2} + \frac{b}{2}$$

نکته:

$$\log_b^{a^n} = n \log_b^a, \log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$$

باتوجه به نکته بالا با فرض $\log_2^x = a$ ، نتیجه می‌شود $\log_x^2 = \frac{1}{a}$. اکنون معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$a + \frac{3}{a} = \log_2^x = 4 \Rightarrow a + \frac{3}{a} = 4 \Rightarrow \frac{a^2 + 3}{a} = 4 \\ \xrightarrow{\times a} a^2 + 3 = 4a \Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow (a - 1)(a - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow \log_2^x = 1 \Rightarrow x = 2 \\ a = 3 \Rightarrow \log_2^x = 3 \Rightarrow x = 8 \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌های معادله برابر است با: $2 + 8 = 10$

نکته:

$$\log_c^a + \log_c^b = \log_c^{ab}$$

نکته: با فرض $a, b > 0$ و $a \neq 1$ داریم: $a^{\log_a^b} = b$
به کمک نکته بالا داریم:

$$5^{\log_5^3} = 3, \quad 3^{\log_3^5} = 5$$

با جایگذاری این مقادیر در معادله داریم:

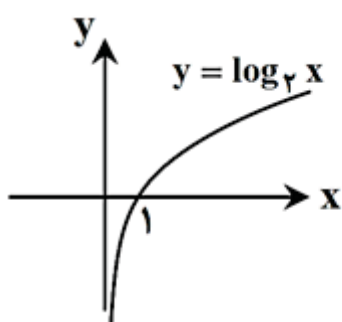
$$(3^x - 5)(5^x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3^x = 5 \Rightarrow x = \log_3^5 \\ 5^x = 3 \Rightarrow 3^x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \log_3^{\sqrt{3}} \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌های این معادله برابر است با:

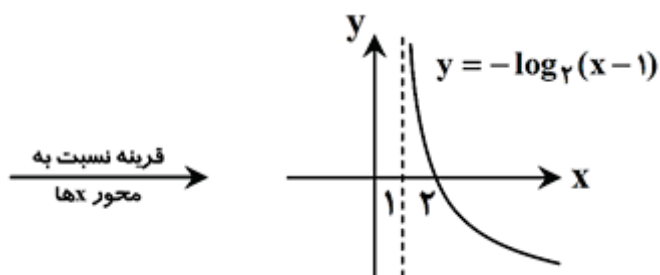
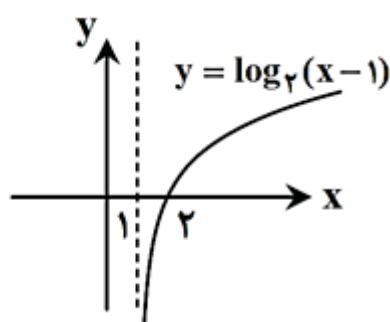
$$\log_3^5 + \log_3^{\sqrt{3}} = \log_3^{5\sqrt{3}}$$

نکته: با فرض $a > 0$ ، برای رسم نمودار تابع $y = f(x - a)$ یا $y = f(x + a)$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را a واحد به سمت راست (چپ) انتقال دهیم.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x قرینه کنیم.
با استفاده از نکات بالا، نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



۱ واحد انتقال به راست



قرینه نسبت به
محور x ها

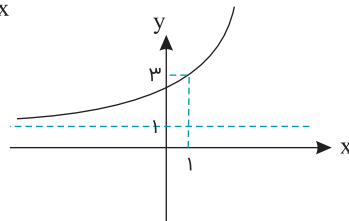
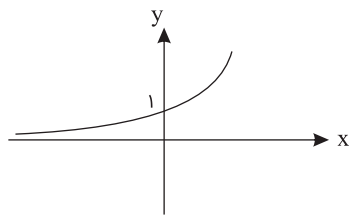


نکته: با فرض $a > 0$ ، برای رسم نمودار تابع $y = f(x - a)$ یا $y = f(x + a)$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را a واحد به سمت راست (چپ) انتقال دهیم.

نکته: با فرض $a > 0$ ، برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + a$ یا $y = f(x) - a$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را a واحد به سمت بالا (پایین) انتقال دهیم.

نمودار تابع $y = 2^x$ به صورت زیر است.

از مقایسه این نمودار با نمودار صورت سؤال، نتیجه می‌شود که نمودار سؤال نسبت به این نمودار به اندازه ۱ واحد به سمت بالا انتقال یافته است؛ بنابراین $a = 1$ ، پس $f(x) = 1 + 2^{x-b}$. همچنین با توجه به نمودار، نقطه $(1, 3)$ روی تابع قرار دارد، پس مختصاتش در ضابطه تابع صدق می‌کند.



$$f(1) = 3 \Rightarrow 1 + 2^{1-b} = 3 \Rightarrow 2^{1-b} = 2 \Rightarrow 1 - b = 1 \Rightarrow b = 0$$

$$a + b = 1 + 0 = 1 \text{ بنابراین}$$

نکته: با فرض $a > 1$ داریم: $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$

نکته: با فرض $0 < a < 1$ داریم: $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{a-1} < 0.125 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{a-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \xrightarrow{0 < \frac{1}{2} < 1} a - 1 > 3 \Rightarrow a > 4$$

نکته: با شرط $a, b > 0$ و $a \neq 1$ ، همواره داریم: $a^{\log_a b} = b$

باتوجه به نکته بالا می‌توان نوشت:

$$\sqrt{2^{3+\log_2 6}} = \sqrt{2^3 \times 2^{\log_2 6}} = \sqrt{8 \times 6} = 4\sqrt{3}$$

نکته ۱:

$$\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b, \log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$$

نکته ۲:

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\begin{cases} \log 20 = a \Rightarrow \log 2 + \log 10 = a \Rightarrow \log 2 = a - 1 \Rightarrow \log 5 = 1 - \log 2 = 1 - (a - 1) = 2 - a \\ \log 30 = b \Rightarrow \log 3 + \log 10 = b \Rightarrow \log 3 = b - 1 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\log 15 = \log 3 + \log 5 = (b - 1) + (2 - a) = b - a + 1$$

نکته:

$$\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b, \quad \log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$$

$$\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$$

$$\log_b^{a^n} = n \log_b^a$$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$A = \log \frac{۴}{۵} + \log \frac{۵}{۶} + \log \frac{۶}{۷} + \dots + \log \frac{۳۹۹}{۴۰۰} = \log \left(\frac{۴}{۵} \times \frac{۵}{۶} \times \frac{۶}{۷} \times \dots \times \frac{۳۹۹}{۴۰۰} \right)$$

$$= \log \frac{۴}{۴۰۰} = \log \frac{۱}{۱۰۰} = \log ۱۰^{-۲} = -۲$$

$$B = (\log_{۱۵}^{۱۶})(\log_{۱۴}^{۱۵}) \dots (\log_۲^{۳}) = \log_۲^{۱۶} = \log_۲^{۲^۴} = ۴$$

$$\frac{A}{B} = \frac{-۲}{۴} = \frac{-۱}{۲} \text{ بنابراین:}$$

گزینه ۴

۵۳

نکته: با فرض $a, b > ۰$ و $a \neq b$ داریم:

$$\log_b^a = x \Leftrightarrow a = b^x$$

با قرار دادن $h = ۱۵۵۰۰$ در رابطه $h = ۱۵۵۰۰(۵ - \log_{۱۰}^P)$ خواهیم داشت:

$$۱۵۵۰۰ = ۱۵۵۰۰(۵ - \log_{۱۰}^P) \Rightarrow ۱ = ۵ - \log_{۱۰}^P \Rightarrow \log_{۱۰}^P = ۴ \Rightarrow P = ۱۰^۴$$

گزینه ۲

۵۴

نکته:

$$(a, b, c > ۰, c \neq ۱) \quad \log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$$

نکته: اگر بزرگی زمین‌لرزه برابر با M در مقیاس ریشتر باشد، مقدار انرژی آزادشده برحسب ارگ (Erg) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$$

میزان بزرگی و انرژی زلزله اول را با $M_۱$ و $E_۱$ و میزان بزرگی و انرژی زلزله دوم را با $M_۲$ و $E_۲$ نمایش می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \log E_۱ &= ۱۱/۸ + ۱/۵M_۱ \\ \log E_۲ &= ۱۱/۸ + ۱/۵M_۲ \end{aligned} \quad (*)$$

باتوجه به صورت سؤال داریم $E_۱ = ۱۰۰۰E_۲$ ، پس:

$$\log E_۱ = \log ۱۰۰۰E_۲ \Rightarrow \log E_۱ = \log ۱۰۰۰ + \log E_۲ \Rightarrow \log E_۱ = \log ۱۰^۳ + \log E_۲$$

$$\Rightarrow \log E_۱ = ۳ + \log E_۲ \xrightarrow{(*)} ۱۱/۸ + ۱/۵M_۱ = ۳ + ۱۱/۸ + ۱/۵M_۲ \Rightarrow ۱/۵M_۱ = ۳ + ۱/۵M_۲$$

$$\Rightarrow ۱/۵M_۱ - ۱/۵M_۲ = ۳ \Rightarrow ۱/۵(M_۱ - M_۲) = ۳ \Rightarrow M_۱ - M_۲ = ۱۵$$

بنابراین زلزله اول ۱۵ ریشتر از زلزله دوم بیشتر است.



راه حل اول:

جرم باقی مانده از این نمونه پس از گذشت t سال، از رابطه $m(t) = ۲۴ \times ۲^{-\frac{t}{۲۵}}$ به دست می آید، پس داریم:

$$۳ = ۲۴ \times ۲^{-\frac{t}{۲۵}} \Rightarrow \frac{1}{8} = ۲^{-\frac{t}{۲۵}} \Rightarrow ۲^{-۳} = ۲^{-\frac{t}{۲۵}}$$

$$\Rightarrow -۳ = -\frac{t}{۲۵} \Rightarrow t = ۷۵ \text{ سال}$$

راه حل دوم:

به جدول زیر توجه کنید:

$m(t)$ (جرم برحسب میلی گرم)	۲۴	$\frac{1}{۲} \times ۲۴ = ۱۲$	$\frac{1}{۲^۲} \times ۲۴ = ۶$	$\frac{1}{۲^۳} \times ۲۴ = ۳$	$\frac{1}{۲^۴} \times ۲۴ = \frac{۱}{۵}$
t (زمان برحسب سال)	۰	۲۵	۵۰	۷۵	۱۰۰

بنابراین بعد از ۷۵ سال، ۳ میلی گرم از ماده باقی می ماند.

نکته: اگر $\log_b^a = x$ ، آنگاه: $a = b^x$

با جایگذاری $M = ۸$ خواهیم داشت:

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵(۸) \Rightarrow \log E = ۲۳/۸ \Rightarrow E = ۱۰^{۲۳/۸}$$