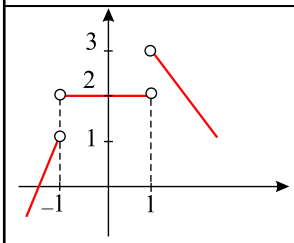
تست مبحث حد و پیوستگی یازدهم تجربی

۱ - با توجه به شکل مقابل حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x) - \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ کدام است؟



۱) ۱   ۲) ۲

۳) ۴   ۴) ۵

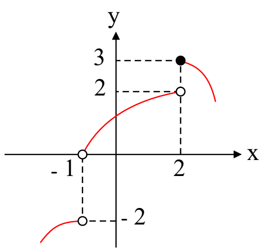
۲ - فرض کنید $f(x) = \begin{cases} ۲ & x \geq ۱ \\ ۱ & x < ۱ \end{cases}$ می باشد حد تابع $f(x)$ وقتی $x \to ۱^-$ کدام است؟

۱) $f(۰)$ ۲) $f(۲)$ ۳) $f(۱)$ ۴) $f(۳)$

۳ - اگر $f(x) = \begin{cases} ax - ۱ & x < ۱ \\ x^۲ + ۲a & x \geq ۱ \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) - \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = -۱$ ، مقدار a کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

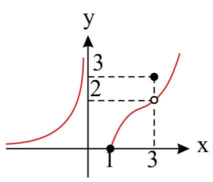
۴ - اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(۱-x)$ کدام است؟



۱) -۱ ۲) -۲

۳) ۲   ۴) صفر

۵ - با توجه به نمودار تابع $f(x)$ ، حاصل کدام یک از حدهای زیر صحیح <u>نیست</u>؟



۱) $\lim\limits_{x\to ۳} f(x) = ۳$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ وجود ندارد.

۳) $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = +\infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = ۰$

۶ - اگر $f(x) = \begin{cases} [x] & ; \ x > -۱ \\ ۱ - [x] & ; \ x \leq -۱ \end{cases}$، آن گاه حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} f(x^۲ - ۱)$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) وجود ندارد.   ۴) صفر

۷ - اگر $f(x) = \begin{cases} x + ۳ & , \ x \geq ۰ \\ ۲x + ۲ & , \ x < ۰ \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x - ۱ & , \ x \geq ۰ \\ x & , \ x < ۰ \end{cases}$ باشند، کدام گزینه درست است؟

۱) f در $x = ۰$ حد ندارد، g در $x = ۰$ حد دارد و $f + g$ نیز در $x = ۰$ حد ندارد.

۲) f و g در $x = ۰$ حد ندارد، اما $f + g$ در $x = ۰$ حد دارد.

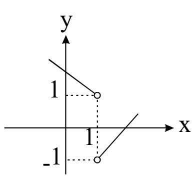
۳) f و g در $x = ۰$ حد ندارد، اما $f - g$ در $x = ۰$ حد دارد.

۴) f، g و $f + g$ در $x = ۰$ حد ندارند.

۸ - تابع $f(x) = \begin{cases} ax + ۲b & ; \ x > ۳ \\ ax^۲ + bx + ۲ & ; \ x < ۳ \end{cases}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x) = ۶$ و $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x) = ۲$ آن گاه $a + b$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۱   ۳) -۳ ۴) ۴

۹ - اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(۱-x) + \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ کدام است؟



۱) صفر   ۲) ۱

۳) -۱ ۴) -۲

۱۰- حاصل $\lim_{x\to ۲^+} [\frac{۳۶}{۱+۴x}]$ کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است.)

① ۴ ② ۳ ③ ۵ ④ وجود ندارد.

۱۱- حد چپ تابع $f(x) = \frac{(۳-[x])\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x-۳}$ در نقطه ی $x=۳$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

① ۱ ② -۱ ③ ۰ ④ ∞

۱۲- در تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^۲+a & ; x<-۲ \\ ۳x+۴ & ; x>-۲ \end{cases}$ مقدار حد چپ در نقطه‌ی $x=-۲$، عکس مقدار حد راست در این نقطه است. a کدام است؟

① ۳ ② ۳٫۵ ③ -۴ ④ $-۴٫۵$

۱۳- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x+a)[x]$ اگر $\lim_{x\to ۲^+} f(x) - \lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۳$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ -۱ ④ ۰

۱۴- حاصل $\lim_{x\to ۱} \frac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}}$ کدام است؟

① -۴ ② -۲ ③ ۲ ④ ۴

۱۵- حد عبارت $\frac{۲[x]}{۲-x} + \frac{x+۲}{x^۲-۲x}$، وقتی $x \to ۲^-$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① $-\infty$ ② $-\frac{۱}{۲}$ ③ ۱ ④ $+\infty$

۱۶- قدرمطلق تفاضل حد چپ و حد راست تابع f به معادله‌ی $f(x) = \frac{۲x^۲-x-۱}{|x-۱|}$ در نقطه‌ی $x=۱$ کدام است؟

① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۶

۱۷- حاصل $\lim_{x\to ۴} \frac{۳-\sqrt{۲x+۱}}{۲-\sqrt{x}}$ کدام است؟

① $\frac{۲}{۳}$ ② $\frac{۳}{۴}$ ③ $\frac{۴}{۳}$ ④ $\frac{۳}{۲}$

۱۸- حاصل $\lim_{x\to ۲^+} \frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲-۴x+۴}}$ کدام است؟

① $-\frac{۱}{۶}$ ② $-\frac{۱}{۱۲}$ ③ $\frac{۱}{۱۲}$ ④ $\frac{۱}{۶}$

۱۹- اگر $\lim_{x\to -۳} \frac{ax+۳a}{۱-\sqrt{۵x+۱۶}} = ۲$ آنگاه a کدام است؟

① $a=۱$ ② $a=-۱$ ③ $a=۵$ ④ $a=-۵$

۲۰- حاصل $\lim_{x\to -۲} \frac{x+\sqrt{۲x+۸}}{x+۲}$ برابر کدام است؟

① $\frac{۳}{۲}$ ② $\frac{۵}{۲}$ ③ $\frac{-۳}{۲}$ ④ $\frac{-۵}{۲}$

۲۱- حاصل حد $\lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)^۲}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[۴]{x}-۱)}$ کدام است؟

① ۲۴ ② ۱۲ ③ ۸ ④ ۶

۲۲- اگر $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{ax^2+2x+b}=2$ باشد، آن‌گاه $a-b$ کدام است؟

① -1 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$

۲۳- حاصل $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+x-10}{x^2-4}$ کدام است؟

① $\frac{4}{3}$ ② صفر ③ $\frac{13}{4}$ ④ حد ندارد.

۲۴- حاصل $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}$ کدام است؟

① 6 ② -6 ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{6}$

۲۵- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cot^2 x}$ کدام است؟

① 1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ -1

۲۶- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{[x]-\sin^2 x}{1+\cos(\frac{\pi}{2}+x)}$ است؟ ([ ] ، علامت جزء صحیح است.)

① 1 ② 2 ③ صفر ④ -1

۲۷- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \dfrac{1+\sin^3 x}{\cos^2 x}$ کدام است؟

① 2 ② -3 ③ 3 ④ $\frac{3}{2}$

۲۸- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^3 x-1}{\cos^2 x}$ کدام است؟

① $\frac{3}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$

۲۹- اگر $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{1-\cos \pi x}}{x^2+ax}=+\infty$ ، حاصل حد چپ این عبارت در $x=0$ کدام است؟

① $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ② $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ③ $-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ ④ $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

۳۰- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{[x]-\sin^2 x}{1+\cos(\frac{\pi}{2}+x)}$ کدام است؟ ([ ] ، علامت جزء صحیح است.)

① 1 ② 2 ③ صفر ④ -1

۳۱- حاصل $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{[x]\sqrt{1-\cos^2 x}}{2\sin x\cos x}$ کدام است؟ ([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

① $\frac{3}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ -2

۳۲- حاصل $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{|1+\cos x|}{\sin^2 x}$ کدام است؟

① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ -1

۳۳- حاصل $A=\lim\limits_{x\to\pi}\left(\frac{۱+\cos^۳ x}{۱+\sin(\frac{\pi}{۲}+x)}+\frac{|\cos x|}{\sin(x-\frac{۳\pi}{۲})}\right)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۳۴- حد کسر $\frac{۱+\sin x}{۱+\sin^۳ x}$ وقتی $x\to\frac{-\pi}{۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{-۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۳۵- اگر $f(x)=\frac{۱-\sin x}{\cos^۲ x}$ و $g(x)=\frac{|x^۲+x-۲|}{x^۲-۴}$ باشد، حاصل عبارت $A=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}f(x)+\lim\limits_{x\to(-۲)^+}g(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۲

۳۶- حاصل $A=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{۲}{\cos x+\sin x}\times\frac{۱+۲\sin x\cos x}{[x]\cos^۲ x+\sin^۲ x}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) وجود ندارد. ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

۳۷- حاصل $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin^۲ x}{۱-\cos^۳(\pi-x)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

۳۸- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{|x^۲+x-۲|}{x-۱} & ;x\neq ۱\\ a & ;x=۱\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بر R پیوسته است؟

۱) هر مقدار a ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار a

۳۹- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}a+\sin ۳x & ۰\leq x<\frac{\pi}{۲}\\ b\cos ۲x & \frac{\pi}{۲}<x\leq ۲\pi\end{cases}$ با شرط $f(\frac{\pi}{۲})=۲$ در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ پیوسته است $a-b$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۴ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۰- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x^۲+ax-۵ & x>۲\\ ax-۱ & x\leq ۲\end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

۱) هر مقدار حقیقی a ۲) هیچ مقدار a ۳) فقط $a=-۲$ ۴) فقط $a=۲$

۴۱- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{x} & ;۱\leq x\leq ۶\\ a+\cos^۲\frac{\pi x}{۳۶} & ;\quad x>۶\end{cases}$، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۴۲- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}a\sin ۲x & ;\frac{\pi}{۴}\leq x<\frac{۳\pi}{۴}\\ \cos(x+\frac{\pi}{۴}) & ;\frac{۳\pi}{۴}\leq x\leq ۲\pi\end{cases}$ بر بازه‌ی $[\frac{\pi}{۴},۲\pi]$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۴۳- اگر $f(x)=\begin{cases} x+a & ; \quad x<1 \\ 1 & ; \quad x\geq 1 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x+1 & ; \quad x<1 \\ \frac{a}{x+1} & ; \quad x\geq 1 \end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، تابع $f+g$ در $x=1$ پیوسته است؟

① -4 ② 4 ③ -2 ④ 2

۴۴- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x-2} & ; x>2 \\ 2x+b & ; x\leq 2 \end{cases}$، به ازای کدام مقدار b همواره پیوسته است؟

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4

۴۵- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} a+\sin^2 x & 0\leq x<\dfrac{\pi}{4} \\ \sqrt{2}\cos 3x & \dfrac{\pi}{4}\leq x\leq 2\pi \end{cases}$، روی بازه‌ی $[0\,,\,2\pi]$ پیوسته است؟

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ هیچ مقدار a

۴۶- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} -x^2+4 & x\geq 1 \\ ax+5x-a & x<1 \end{cases}$ به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a، در بازه‌ی $[-2,2]$ پیوسته است؟

① $\varnothing$ ② R ③ $\{0,1\}$ ④ $\{-2,2\}$

۴۷- با کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+a} & ; \quad x\geq -1 \\ x^2+ax & ; \quad x<-1 \end{cases}$ ، در $x=-1$ پیوسته است؟

① $\{1,\sqrt{2}\}$ ② $\{1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\}$ ③ $\varnothing$ ④ $\mathbb{R}$

۴۸- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\sqrt{2x}}{2-x} & ;x\neq 2 \\ a & ;x=2 \end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، در نقطه‌ی $x=2$ پیوسته است؟

① -2 ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 1

۴۹- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x-2} & ;x>2 \\ 2x+b & ;x\leq 2 \end{cases}$، به ازای کدام مقدار b همواره پیوسته است؟

① -4 ② 2 ③ -2 ④ 4

۵۰- تابع با ضابطه‌ی $\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & ;|x|>1 \\ 2x & ;|x|\leq 1 \end{cases}$، از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول های ۱ و -1 چگونه است؟

① در -1 ناپیوسته - در ۱ ناپیوسته ② در -1 ناپیوسته - در ۱ پیوسته ③ در -1 پیوسته - در ۱ پیوسته ④ در -1 پیوسته - در ۱ ناپیوسته

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=3\,,\quad \lim_{x\to(-1)^-} f(x)=1 \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)-\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=3-1=2$$

۲ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$$

تنها گزینه‌ای که جواب آن عدد یک می‌شود گزینه‌ی اول است زیرا برای محاسبه‌ی $f(0)$ باید سراغ ضابطه‌ی پایین برویم که جواب یک می‌شود.

۳ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax-1)=a-1\quad,\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(x^2+2a\right)=1+2a$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)-\lim_{x\to 1^-} f(x)=-1 \Rightarrow (1+2a)-(a-1)=-1 \Rightarrow a=-1-2=-3$$

۴ - گزینه ۴

$$x\to 2^- \Rightarrow x<2 \Rightarrow -x>-2 \Rightarrow 1-x>-1$$

پس وقتی $x\to 2^-$ آنگاه $1-x\to(-1)^+$ و در نتیجه:

$$\lim_{x\to 2^-} f(1-x)=\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=f(-1^+)=0$$

۵ - گزینه ۱ به بررسی ۴ گزینه می‌پردازیم.

گزینه‌ی اول: $\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^-} f(x)=2\to\lim_{x\to 3} f(x)=2$

گزینهٔ دوم: حد چپ تابع در $x=1$ وجود ندارد پس تابع در این نقطه حد ندارد.

گزینه‌ی سوم: $\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$

گزینه‌ی چهارم: $\lim_{x\to -\infty} f(x)=0$

بنابراین فقط گزینه‌ی اول، صحیح نیست.

۶ - گزینه ۱

$$x\to 0 \Rightarrow x^2\to 0^+ \Rightarrow x^2-1\to(-1)^+$$

پس: $\lim_{x\to 0} f(x^2-1)=\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}[x]=[(-1)^+]=-1$

۷ - گزینه ۲

$$\begin{cases}\lim_{x\to 0^+} f(x)=3\\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=2\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)\ \text{وجود ندارد}$$

$$\begin{cases}\lim_{x\to 0^+} f(x)=-1\\ \lim_{x\to 0^-} g(x)=0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 0} g(x)\ \text{وجود ندارد}$$

$$(f+g)(x)=\begin{cases}2x+2\ , & x\geq 0\\ 3x+2\ , & x<0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 0}(f+g)(x)=2$$

$$(f-g)(x)=\begin{cases}4\ , & x\geq 0\\ x+2\ , & x<0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 0}(f-g)(x)=\ \text{حد ندارد}$$

۸ - گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 3^+} f(x)=6\to\lim_{x\to 3^+}(ax+2b)=6\to 3a+2b=6\\ \lim_{x\to 3^-} f(x)=2\to\lim_{x\to 3^-}(ax^2+bx+2)=2\to 9a+3b=0\end{array}\right\}\to b=6\ ,\ a=-2$$

پس $a+b=4$ است.

۹ - گزینه ۱ ابتدا باید وضعیت عبارت $(1-x)$ را مشخص نماییم.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)+\lim_{x\to 0^+} f(1-x)=-1+(1)=0$$

۱۰ - گزینه ۲

$$x>2\Rightarrow 1+4x>9\Rightarrow\frac{1}{1+4x}<\frac{1}{9}\Rightarrow\frac{36}{1+4x}<4\Rightarrow\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{36}{1+4x}\right]=[4^-]=3$$

۱۱ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{(۳-[x])\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{(۳-\overset{\overset{۲}{\uparrow}}{[۳^-]})\sqrt{(x-۳)^۲}}{x-۳}$$

$$=\lim_{x\to ۳^-}\frac{\overbrace{|x-۳|}^{-}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{-(x-۳)}{x-۳}=-۱$$

۱۲ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{۱}{f(x)}\to ۴+a=\frac{۱}{-۶+۴}\to ۴+a=\frac{-۱}{۲}$$

$$\to ۸+۲a=-۱\to ۲a=-۹\to a=-\frac{۹}{۲}=-۴٫۵$$

۱۳ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)-\lim_{x\to ۲^-}f(x)=۳\Rightarrow(۲+a)[۲^+]-(۲+a)[۲^-]=۳$$

$$\Rightarrow(۲+a)(۲)-(۲+a)(۱)=۳\Rightarrow ۴+۲a-۲-a=۳\Rightarrow a=۱$$

۱۴ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}}=\frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام باید هم صورت هم مخرج را گویا نماییم:

$$\lim\frac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}}\times\frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}\times\frac{۲+\sqrt{۵-x}}{۲+\sqrt{۵-x}}$$

$$\lim\frac{(۱-x)+(۲+\sqrt{۵-x})}{\underbrace{(۴-۵+x)}_{(x-۱)}(۱+\sqrt{x})}=\lim_{x\to ۱}\frac{-\cancel{(x-۱)}\,(۲+\sqrt{۵-x})}{\cancel{(x-۱)}\,(۱+\sqrt{x})}=\frac{-۴}{۲}=-۲$$

۱۵ - گزینه ۲ $[۲^-]$ برابر یک می‌باشد بنابراین حد داده شده به این صورت درمی‌آید.

$$\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{x+۲}{x^۲-۲x}+\frac{۲}{۲-x}\right)=\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{x+۲}{x(x-۲)}-\frac{۲}{(x-۲)}\right)$$

$$\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{x+۲-۲x}{x(x-۲)}\right)=\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{-x+۲}{x(x-۲)}\right)=\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{-(x-۲)}{x(x-۲)}\right)=\frac{-۱}{۲}$$

۱۶ - گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x^۲-x-۱}{\underbrace{|x-۱|}_{+}}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x^۲-x-۱}{x-۱}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۱^+}\frac{۴x-۱}{۱}=۳\\ \lim_{x\to ۱^-}\frac{۲x^۲-x-۱}{\underbrace{|x-۱|}_{-}}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۲x^۲-x-۱}{-(x-۱)}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۱^-}\frac{۴x-۱}{-۱}=-۳\end{array}\right\}\Rightarrow|-۳-(۳)|=|-۶|=۶$$

۱۷ - گزینه ۳

$$\lim\frac{۳-\sqrt{۲x+۱}}{۲-\sqrt{x}}\times\frac{۳+\sqrt{۲x+۱}}{۳+\sqrt{۲x+۱}}\times\frac{۲\sqrt{x}}{۲+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{(۹-(۲x+۱))\overbrace{(۲+\sqrt{x})}^{(۴)}}{(۴-x)\underbrace{(۳+\sqrt{۲x+۱})}_{۶}}=\lim\frac{(-۲x+۸)(۴)}{(۴-x)(۶)}=\lim\frac{۲(۴-x)(۴)}{(۴-x)(۶)}=\frac{۴}{۳}$$

۱۸ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲-۴x+۴}}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}}\times\frac{(4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2})}{(4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2})}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{8-x-6}{\underbrace{\sqrt{(x-2)^2}}_{|x-2|}(4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2})}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{(\cancel{2-x})}{\underbrace{(x-2)}_{-\cancel{(2-x)}}(4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2})}=-\frac{1}{12}$$

۱۹ - گزینه ۴ ابتدا با جایگذاری می‌توان مبهم بودن کسر را شناسائی نمود. حال برای شناسائی عامل صفرشونده باید مخرج را گویا نمود:

$$\lim_{x\to -3}\frac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}}\times\frac{1+\sqrt{5x+16}}{1+\sqrt{5x+16}}=\lim\frac{a\,\cancel{(x+3)}\,(1+\sqrt{5x+16})}{\underbrace{1-5x-16}_{-5\,\cancel{(x+3)}}}$$

$$=\frac{2a}{-5}=2\to 2a=-10\to a=-5$$

۲۰ - گزینه ۱ باید کسر را در مزدوج صورت $\lim_{x\to -2}\frac{x+\sqrt{2x+8}}{x+2}=?$ ضرب نمائیم. باید توجه داشت که می‌توان در مخرج کسر عامل صفرشونده وجود دارد:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-(2x+8)}{(x+2)\underbrace{(x-\sqrt{2x+8})}_{-4}}=\lim\frac{x^2-2x-8}{(x+2)(-4)}=\lim\frac{\cancel{(x+2)}\,(x-4)}{\cancel{(x+2)}\,(-4)}=\frac{3}{2}$$

۲۱ - گزینه ۳ اگر صورت و مخرج بصورت ضرب باشند و تعداد جملات آنها برابر باشد آن عبارت را به ضرب چند جمله تبدیل می کنیم و هر کدام را بطور جداگانه رفع ابهام می کنیم.

روش اول:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[4]{x}-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\sqrt{x}-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\sqrt[4]{x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)}\times\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[4]{x}-1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt[4]{x}-1)}=2\times 4=8$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt[4]{x}-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}}=2\times 4=8$$

۲۲ - گزینه ۴ قدم اول جایگذاری عدد می‌باشد باتوجه به این که صورت کسر عدد صفر شده و جواب حد عدد غیر صفر می‌باشد، مخرج کسر باید به ازای $x=1$ برابر صفر شود:

$$ax^2+2x+b\overset{x=1}{=\!=}0$$

$$a+b+2=0\to b=-2-a$$

در مرحله‌ی بعد مخرج را با استفاده از تقسیم تجزیه می‌نمائیم:

$$\begin{array}{l|l} ax^2+2x+b & x-1 \\ \cline{2-2} & ax+a+2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(\cancel{x-1})}{(ax+a+2)(\cancel{x-1})}=\frac{-1}{2a+2}=2\to 4a+4=-1\to a=-\frac{5}{4}$$

$$b=-2-a=-2+\frac{5}{4}=-\frac{3}{4}$$

$$a-b=-\frac{1}{2}$$

۲۳ - گزینه ۳ قدم اول جایگذاری است که مبهم $\frac{0}{0}$ تولید می‌شود. حالا برای استخراج عامل صفر شوند. می‌توان از تجزیه و گویا کردن استفاده کرد.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x-10}{x^2-4}=\frac{0}{0}$$

$$\begin{array}{r|l} x^{۳}+x-۱۰ & x-۲ \\ \cline{2-2} -(x^{۳}-۲x^{۲}) & x^{۲}+۲x+۵ \\ \hline ۲x^{۲}+x-۱۰ & \\ -(۲x^{۲}-۴x) & \\ \hline ۵x-۱۰ & \\ -(۵x-۱۰) & \\ \hline ۰ & \end{array} \rightarrow \lim_{x\to ۲} \frac{\cancel{(x-۲)}(x^{۲}+۲x+۵)}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)} = \frac{۱۳}{۴}$$

۲۴ ـ گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)^{۲}}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[۳]{x}-۱)} = \frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام کافی است مخرج کسر دو بار گویا شود هم بوسیله‌ی مزدوج هم بوسیله‌ی مکمل:

$$\lim \frac{(x-۱)^{۲}}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[۳]{x}-۱)} \times \frac{(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x}+۱)} \times \frac{(\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{(\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱)}$$

$$\lim \frac{\cancel{(x-۱)}^{۲}(\sqrt{x}+۱)(\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{\cancel{(x-۱)}^{۲}} = ۶$$

۲۵ ـ گزینه ۳ نمی‌توان با استفاده از روابط مثلثاتی عامل صفرشونده را استخراج و حذف نمود:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{(۱-\sin x)(\sin^{۲} x)}{\cos^{۲} x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{(۱-\sin x)(\sin^{۲} x)}{(۱-\sin^{۲} x)}$$

$$\lim \frac{\cancel{(۱-\sin x)}(\sin^{۲} x)}{\cancel{(۱-\sin x)}(۱+\sin x)} = \frac{۱}{۲}$$

۲۶ ـ گزینه ۲

$$x \to \frac{\pi}{۲} \Rightarrow [x] = [\frac{\pi}{۲}] = ۱$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+x) = -\sin x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱-\sin^{۲} x}{۱-\sin x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{(۱-\sin x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} (۱+\sin x) = ۱+۱ = ۲$$

۲۷ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۲}} \frac{۱+\sin^{۳} x}{\cos^{۲} x} = \frac{۱+(-۱)}{۰} : \frac{۰}{۰} \quad \text{ابهام}$$

$$\xrightarrow{\cos^{۲} x = ۱-\sin^{۲} x} \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۲}} \frac{(۱+\sin x)(۱-\sin x+\sin^{۲} x)}{(۱+\sin x)(۱-\sin x)} = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۲}} \frac{۱-\sin x+\sin^{۲} x}{۱-\sin x} = \frac{۱+۱+۱}{۱+۱} = \frac{۳}{۲}$$

۲۸ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\sin^{۳} x-۱}{\cos^{۲} x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{(\sin x-۱)(\sin^{۲} x+\sin x+۱)}{۱-\sin^{۲} x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\overbrace{(\sin x-۱)}^{-\cancel{(۱-\sin x)}}(\sin^{۲} x+\sin x+۱)}{\cancel{(۱-\sin x)}(۱+\sin x)} = -\frac{۳}{۲}$$

۲۹ ـ گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\lim_{u\to ۰}(۱-\cos u) \sim \frac{u^{۲}}{۲}}$

چون جواب حد، بی‌نهایت شده است پس مخرج کسر حتماً برابر صفر است.

$$x^{۲}+ax = ۰ \xrightarrow{x=۱} ۱+a = ۰ \rightarrow a = -۱$$

$$\lim_{x\to ۰^{-}} \frac{\sqrt{۱-\cos \pi x}}{x^{۲}-x} = \lim_{x\to ۰^{-}} \frac{\sqrt{\frac{\pi^{۲}x^{۲}}{۲}}}{x^{۲}-x} = \lim_{x\to ۰^{-}} \frac{\frac{\pi|\overbrace{x}^{-}|}{\sqrt{۲}}}{x^{۲}-x} = \lim_{x\to ۰^{-}} \frac{\frac{-\pi x}{\sqrt{۲}}}{x(x-۱)} = \lim_{x\to ۰^{-}} \frac{-\pi}{\sqrt{۲}(x-۱)} = \frac{\pi}{\sqrt{۲}}$$

۳۰ ـ گزینه ۲ باید توجه داشت که در محاسبهٔ حدود هرگاه به جزء صحیح برخورد نماییم، باید عدد معادل آن را شناسایی و جایگذاری نماییم.

$$\pi = ۳/۱۴ \rightarrow \frac{\pi}{۲} = ۱/۵۷ \rightarrow [x] = [\frac{\pi}{۲}] = [۱/۵۷] = ۱$$

اما می‌توان $\cos(\frac{\pi}{۲}+x)$ را هم به فرم ساده‌تری تبدیل نمود:

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+x) = -\sin x$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{[x]-\sin^۲ x}{۱+\cos(\frac{\pi}{۲}+x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin^۲ x}{۱-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{۱-\sin x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(۱+\sin x)=۲$$

۳۱ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{[x]\sqrt{۱-\cos^۲ x}}{۲\sin x\cos x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{[۳/۱۴^+]\sqrt{۱-\cos^۲ x}}{۲\sin x\cos x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{۳\sqrt{\sin^۲ x}}{۲\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\pi^+}\frac{۳|\sin x|}{۲\sin x\cos x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{۳(-\cancel{\sin x})}{۲\cancel{\sin x}\cos x}=\frac{-۳}{۲(-۱)}=\frac{۳}{۲}$$

$(x\to\pi^+\Rightarrow$ در ربع سوّم $x \Rightarrow \sin x<۰\Rightarrow|\sin x|=-\sin x)$

۳۲ - گزینه ۲

چون $-۱\leq\cos x\leq۱$ است پس $۱+\cos x$ همواره مثبت است.

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{|\overbrace{۱+\cos x}^{+}|}{\sin^۲ x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{۱+\cos x}{۱-\cos^۲ x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{(۱+\cos x)}{(۱+\cos x)(۱-\cos x)}=\frac{۱}{۱-(-۱)}=\frac{۱}{۲}$$

۳۳ - گزینه ۱

نکته: $a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{۱+\cos^۳ x}{۱+\sin(\frac{\pi}{۲}+x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{(۱+\cos x)(۱-\cos x+\cos^۲ x)}{۱+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\pi}(۱-\cos x+\cos^۲ x)=۱+۱+۱=۳$$

$$x\to\pi\Rightarrow\cos x<۰\Rightarrow|\cos x|=-\cos x$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\pi}\frac{|\cos x|}{\sin(x-\frac{۳\pi}{۲})}=\lim_{x\to\pi}\frac{-\cos x}{\cos x}=-۱\Rightarrow A=۳-۱=۲$$

۳۴ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{۲}}\frac{۱+\sin x}{۱+\sin^۳ x}=\frac{۱+(-۱)}{۱+(-۱)^۳}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{۲}}\frac{۱+\sin x}{۱+\sin^۳ x}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{۲}}\frac{\cancel{(۱+\sin x)}}{\cancel{(۱+\sin x)}(۱-\sin x+\sin^۲ x)}=\frac{۱}{۱-(-۱)+(-۱)^۲}=\frac{۱}{۳}$$

۳۵ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin x}{\cos^۲ x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin x}{۱-\sin^۲ x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\cancel{(۱-\sin x)}}{\cancel{(۱-\sin x)}(۱+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۱+\sin x}=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{|x^۲+x-۲|}{x^۲-۴}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{|x+۲||x-۱|}{(x-۲)(x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{-(x-۱)\cancel{(x+۲)}}{(x-۲)\cancel{(x+۲)}}=\frac{-(-۳)}{-۴}=-\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow A=\frac{۱}{۲}+(-\frac{۳}{۴})=\frac{۲-۳}{۴}=-\frac{۱}{۴}$$

۳۶ - گزینه ۴ قدم اول باید جزء صحیح را به عدد تبدیل نماییم.

باید توجه داشت که $\pi=۳/۱۴$ پس داریم:

$$-۱<-\frac{\pi}{۴}<۰\rightarrow\left[-\frac{\pi}{۴}\right]=-۱$$

حال داریم:

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{۱+۲\sin x\ \cos x}{-\cos^۲ x+\sin^۲ x}\times\frac{۲}{\cos x+\sin x}$$

$$=\lim\frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x+۲\sin x\ \cos x}{\sin^۲ x-\cos^۲ x}\times\frac{۲}{\sin x+\cos x}$$

$$=\lim\frac{(\sin x+\cos x)^۲\times۲}{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)^۲}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{۲}{\sin x-\cos x}$$

$$\lim \frac{۲}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۲}{-\sqrt{۲}}=-\sqrt{۲}$$

۳۷ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^۲ x}{۱-\cos^۳(\pi-x)}=\frac{(۰)^۲}{۱-(۱)^۳}=\frac{۰}{۰}\quad,\quad \cos(\pi-x)=-\cos x$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to\pi}\frac{\sin^۲ x}{۱-\cos^۳(\pi-x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^۲ x}{۱-(-\cos x)^۳}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^۲ x}{۱+\cos^۳ x}=\lim_{x\to\pi}\frac{۱-\cos^۲ x}{۱+\cos^۳ x}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{(۱-\cos x)\cancel{(۱+\cos x)}}{\cancel{(۱+\cos x)}(۱-\cos x+\cos^۲ x)}=\frac{۱-(-۱)}{۱-(-۱)+(-۱)^۲}=\frac{۲}{۳}$$

۳۸ - گزینه ۴

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=۱$ بدست آوریم.

$$\lim_{x\to۱^+} f(x)=\lim_{x\to۱^+}\frac{|\overbrace{(x+۲)(x-۱)}^{+}|}{x-۱}=\lim_{x\to۱^+}\frac{(x+۲)(x-۱)}{(x-۱)}=۳$$

$$\lim_{x\to۱^-} f(x)=\lim_{x\to۱^-}\frac{|\overbrace{(x+۲)(x-۱)}^{-}|}{x-۱}=\lim_{x\to۱^-}\frac{-(x+۲)(x-۱)}{(x-۱)}=-۳$$

این تابع در $x=۱$ پیوسته نمی‌باشد.

۳۹ - گزینه ۴ کافی است شرط پیوستگی را در $x=\frac{\pi}{۲}$ بررسی کنید (تساوی حد راست و چپ و مقدار تابع در $x=\frac{\pi}{۲}$)

$$\begin{cases}\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} b\cos ۲x=b\cos\pi=-b\\ \lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}(a+\sin ۳x)=a+\sin\frac{۳\pi}{۲}=a-۱\\ f(\frac{\pi}{۲})=۲\end{cases}$$

پس: $-b=۲\to b=-۲\ ,\ a-۱=۲\to a=۳\to a-b=۵$

۴۰ - گزینه ۱ چون هر دو ضابطه پیوسته هستند، برای آنکه تابع دو ضابطه‌ای f روی R (مجموعه‌ی اعداد حقیقی) پیوسته باشد، کافی است شرایط پیوستگی تابع را تنها در نقطه‌ی مرزی آن، یعنی $x=۲$ برقرار نماییم.

$$\begin{cases}\text{حد راست}=\lim_{x\to۲^+} f(x)=\lim_{x\to۲^+}(x^۲+ax-۵)=۴+۲a-۵=۲a-۱\\ \text{حد چپ}=\lim_{x\to۲^-} f(x)=f(۲)=\lim_{x\to۲^-}(ax-۱)=۲a-۱\end{cases}$$

چون به ازای هر مقدار a، حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۲$ با هم برابر هستند، پس نتیجه می‌گیریم که به ازای هر مقدار حقیقی a، تابع f روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است.

۴۱ - گزینه ۲ چون تابع، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از یک پیوسته است پس حتماً در $x=۶$ نیز باید پیوسته باشد. یعنی حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۶$ باید با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to۶^+} f(x)=\lim_{x\to۶^+}(a+\cos^۲\frac{\pi x}{۳۶})=a+\cos^۲\frac{\pi}{۶}=a+\frac{۳}{۴}\\ &\lim_{x\to۶^-} f(x)=\lim_{x\to۶^-}\sin\frac{\pi}{x}=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}\\ &f(۶)=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}\end{aligned}\right\}\Rightarrow a+\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{-۱}{۴}$$

۴۲ - گزینه ۴ برای پیوستگی f در بازه ی $[\frac{\pi}{۴},۲\pi]$ تنها کافی است شرایط پیوستگی را در نقطه‌ی مرزی $x=\frac{۳\pi}{۴}$ اعمال کنیم. (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^+}\cos(x+\frac{\pi}{4})=\cos\pi=-1\\ \lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^-} a\sin 2x=a\sin\frac{3\pi}{2}=-a\\ f(\frac{3\pi}{4})=\cos(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4})=\cos\pi=-1\end{array}\right\}\Rightarrow -a=-1\Rightarrow a=1$$

۴۳ – گزینه ۱ ابتدا $f(x)+g(x)$ را تشکیل می‌دهیم و سپس شرط پیوستگی (یعنی تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x=1$ اعمال می‌کنیم.

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}2x+a+1 & x<1\\ \frac{a}{x+1}+1 & x\geq 1\end{cases}$$

حد راست: $\lim\limits_{x\to1^+}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to1^+}(\frac{a}{x+1}+1)=\frac{a}{2}+1$

حد چپ: $\lim\limits_{x\to1^-}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to1^-}(2x+a+1)=2+a+1=a+3$

مقدار تابع: $(f+g)(1)=\frac{a}{2}+1$

پس: $\frac{a}{2}+1=a+3\to a+2=2a+6\to a=-4$

۴۴ – گزینه ۱ می‌دانیم اگر $x=k$ یکی از ریشه‌های تابع $f(x)$ باشد آن‌گاه $f(x)$ بر $x-k$ بخش‌پذیر است.

کافی است شرط پیوستگی (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x=2$ اعمال کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x^3-3x^2+4}{x-2}=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to2^+}\frac{(x-2)(x^2-x-2)}{(x-2)}=\lim\limits_{x\to2^+}(x^2-x-2)=0\\ \lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(2x+b)=4+b\\ f(2)=4+b\end{array}\right\}\Rightarrow 0=4+b\Rightarrow b=-4$$

۴۵ – گزینه ۱ برای پیوستگی تابع f در بازه‌ی $[0,2\pi]$، تنها کافی است شرایط پیوستگی تابع را در نقطه‌ی مرزی به طول $x=\frac{\pi}{4}$ اعمال کنیم. (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\sqrt{2}\cos 3x=\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}=\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-1\\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}(a+\sin^2 x)=a+\sin^2\frac{\pi}{4}=a+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=a+\frac{1}{2}\\ f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}=\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-1\end{array}\right\}\Rightarrow a+\frac{1}{2}=-1\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

۴۶ – گزینه ۱ کافی است شرط پیوستگی یعنی تساوی حدود راست و چپ و مقدار تابع با هم را در $x=1$ بررسی کنیم.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(-x^2+4)=-1+4=3\\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(ax+5x-a)=a+5-a=5\\ f(1)=-1+4=3\end{cases}$$

تابع f در $x=1$ پیوسته نمی‌باشد. بنابراین به ازای هیچ مقداری برای a تابع f در بازه‌ی $[-2,2]$ پیوسته نمی‌باشد.

۴۷ – گزینه ۳

برای این که تابع f در نقطه ی مرزی $x=-1$ پیوسته باشد، باید حد راست، حد چپ و مقدار تابع در این نقطه برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{1}{x+a}=\frac{1}{-1+a}=\frac{-1}{1-a}\\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x^2+ax)=(-1)^2+a(-1)=1-a\\ f(-1)=\frac{1}{-1+a}=\frac{-1}{1-a}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{-1}{1-a}=1-a\Rightarrow(1-a)^2=-1\Rightarrow \text{امکان ندارد}$$

۴۸ – گزینه ۳

شرط پوسیدگی تابع f در $x=a$ این است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\frac{x-\sqrt{2x}}{2-x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim\limits_{x\to2}\frac{1-\frac{1(2)}{2\sqrt{2x}}}{-1}=-\frac{1}{2}$$

پس $f(2)=a=-\frac{1}{2}$ است

۴۹ – گزینه ۱ کافی است شرط پیوستگی (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x=2$ اعمال کنیم

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۳-۳x^۲+۴}{x-۲}=\frac{۰}{۰}$$

برای استخراج عامل صفرشونده می‌توان صورت را برای عامل صفرشونده $x-۲$ تقسیم نمود:

$$\begin{array}{r|l} x^۳-۳x^۲+۴ & x-۲ \\ \hline & x^۲-x-۲ \\ ۰ & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{\cancel{(x-۲)}(x^۲-x-۲)}{\cancel{(x-۲)}}=۰ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-}(۲x+b)=۴+b \end{array}\right\}\ ۰=۴+b\to b=-۴$$

۵۰ - گزینه ۴ ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} x-۱ & x>۱ \ \text{یا}\ x<-۱ \\ ۲x & -۱\leq x\leq ۱ \end{cases}$$

حد راست و حد چپ و مقدار تابع را باید در $x=۱$ و $x=-۱$ بدست آوریم.

$$x=۱\ :\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(x-۱)=۱-۱=۰ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=۲(۱)=۲ \\ f(۱)=۲(۱)=۲ \end{cases}\Rightarrow$$ تابع در $x=۱$ ناپیوسته است.

$$x=-۱\ :\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to (-۱)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to (-۱)^+}۲x=۲(-۱)=-۲ \\ \lim\limits_{x\to (-۱)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to (-۱)^-}(x-۱)=-۱-۱=-۲ \\ f(-۱)=۲(-۱)=-۲ \end{cases}\Rightarrow$$ تابع در $x=-۱$ پیوسته است.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۹ - ۱	۱۷ - ۳	۲۵ - ۳	۳۳ - ۱	۴۱ - ۲	۴۹ - ۱
۲ - ۱	۱۰ - ۲	۱۸ - ۲	۲۶ - ۲	۳۴ - ۴	۴۲ - ۴	۵۰ - ۴
۳ - ۲	۱۱ - ۲	۱۹ - ۴	۲۷ - ۴	۳۵ - ۲	۴۳ - ۱	
۴ - ۴	۱۲ - ۴	۲۰ - ۱	۲۸ - ۲	۳۶ - ۴	۴۴ - ۱	
۵ - ۱	۱۳ - ۱	۲۱ - ۳	۲۹ - ۴	۳۷ - ۳	۴۵ - ۱	
۶ - ۱	۱۴ - ۲	۲۲ - ۴	۳۰ - ۲	۳۸ - ۴	۴۶ - ۱	
۷ - ۲	۱۵ - ۲	۲۳ - ۳	۳۱ - ۱	۳۹ - ۴	۴۷ - ۳	
۸ - ۴	۱۶ - ۴	۲۴ - ۱	۳۲ - ۲	۴۰ - ۱	۴۸ - ۳	