

آکادمی
ریاضی
مهندس روحانی

ریاضی ۳

مقاطع
مخروطی

آموزش
مفهوم

برای خطای خط کتاب درسی

حل آزمون های نهم



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



این مجموعه شامل درسنامه‌ای کامل به همراه ۷۰۰ سؤال متنوع و حل شده از سؤالات کتاب درسی و امتحانات نهایی داخل و خارج از کشور به همراه سؤالات مفهومی و تألیفی از متن کتاب درسیه. تمام نکات لازم برای شما ارائه شده. این کتاب با توجه به رویکرد کتاب ریاضی ۳ تدوین شده و سعی کردم کاستی‌های اونو پوشش بدم. از طرفی نحوه‌ی نوشتن پاسخ تشریحی، برای امتحان نهایی هم ارائه شده تا به "اندازه بنویسی و نمره سوال رو کامل بگیری". سازو کارتدوین کتاب بطوریه که با استفاده از مفاهیم و سؤالات حل شده قادر به حل سؤالات بعدی باشی. ۸ آزمون شبیه سازی شده امتحان نهایی همراه با پاسخنامه کاملاً تشریحی و "توضیح دار" آوردم تا شما سؤالات امتحان نهایی رو قبل از برگزاری دیدار کنید.

برای موفقیت در درس ریاضی باید از حل مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی شروع کنید و به هیچ‌وجه از آن غافل نشوید سؤالات امتحانات نهایی و حتی کنکور به طور مستقیم از تمرین‌ها و مثال‌های کتاب درسی طراحی می‌شن. آفت موفقیت شما حفظ کردن پاسخ تمریناته! تسلط بر مفاهیم مستلزم فهم درست درسه و اکتفا کردن به خواندن حل مسأله کارساز نیست، دقت کنید که حل هر سؤال برای شما کمکیه برای حل سؤالات جدیدتر و درک مفاهیم اساسی ریاضی از طریق حل مسئله. دقت به موارد زیر موفقیت شما را افزایش میده:

- ۱- بررسی موضوعات به صورت تشریحی و مفهومی و همچنین توجه به کاربرد مفاهیم و تعاریف در حل مسئله.
 - ۲- یادگیری عمیق موضوعات با حوصله‌ی زیاد و اینکه روش‌های مختلف حل یه سوال رو یادگیری.
 - ۳- بررسی نمونه سؤالات حل شده و پس از آن حل تمرین (البته به اعتقاد من مثال‌های حل شده کتاب رو هم باید اول سعی کنیم خودمون حل کنیم) و در صورت نیافتن راه حل رجوع به پاسخ.
- خوبه بدونید ارزش ۵۰ تمرین که خودتون حل می‌کنید به مراتب بیش‌تر از خوندن و حفظ کردن ۱۰۰۰ تمرین حل شده است، چون مهم‌ترین قسمت یادگیری و کاربردی‌ترین آن برای حل مسأله ریاضی مثال‌ها و تمرین‌هایی است که خودتون به حل آن می‌پردازید.
- فرآیند یادگیری ریاضی تدریجیه و در صورت عدم تکرار و تداوم از یاد می‌ره، بنابراین انتظار نداشته باشید در این درس در کوتاه مدت تسلط کامل پیدا کنید بلکه این مهم آهسته و پیوسته با تمرین مطالب آموخته شده اتفاق می‌افته. تسلط و مهارت در هر درسی نتیجه تلاش مستمر و پیگیریه.

لطف کنید کمی و کاستی این کتاب را از من دریغ نکنید تا مجموعه بهتری ارائه بشود از صبر و حوصله و دقت شما سپاس بی پایان دارم.

سپاس و عشق، نثار همسر و فرزندانم که برای تالیف این مختصر وقت بسیاری را از ایشان دریغ داشتم.

کرج فروردین ۱۴۰۴: محمد صادق روحانی گلمجانی

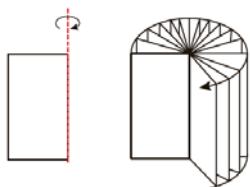
فصل ۶ هندسه



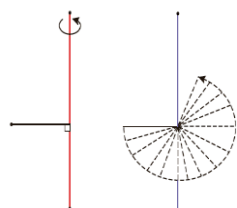
تفکر هندسی

فرایند تفکر تجسمی بر اساس تصویری سازی ذهنی حالات ممکن از پدیده های واقعی و مجازی است و با توجه به کشف و درک این حالات و نتایج حاصل از تحلیل آنها می توان مسائل مرتبط را حل و بحث نمود .

دوران



شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض آن : یک استوانه خواهد بود .

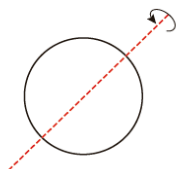
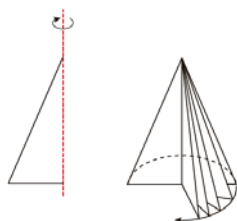


شکل حاصل از دوران یک پاره خط حول پاره خط دیگری که بر آن عمود است :

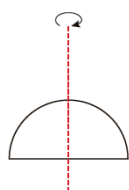
دایره ای تو پر خواهد بود .



شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه: مخروطی قائم و تو خالی خواهد بود .



شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطر های خود : کره ای تو خالی خواهد بود

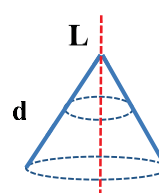
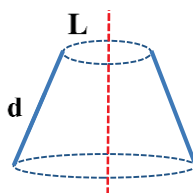
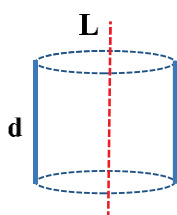


شکل حاصل از دوران یک نیم دایره حول شعاع عمود بر قطر آن : یک نیم کره تو خالی خواهد بود .

(۱) اگر پاره خطی حول محوری موازی خودش دوران کند سطح استوانه حاصل می شود .

(۲) اگر پاره خطی حول محور ، مایل دوران کند سطح مخروطی ناقص حاصل می شود .

(۳) اگر پاره خطی حول محور ، مایل دوران کند و یک سر آن روی محور باشد سطح مخروطی حاصل می شود .





الف) اگر کره را با یک صفحه قطع دهیم همواره سطح مقطع دایره خواهد بود .

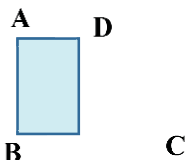
ب) اگر یک استوانه قائم را با یک صفحه قطع دهیم ممکن است مستطیل ، بیضی ، دایره ایجاد شود .

پ) اگر پاره خطی حول محوری موازی خودش دوران کند سطح استوانه حاصل می شود .

ت) اگر یک مستطیل حول یکی از اضلاعش دوران کند استوانه ساخته می شود .

ث) اگر یک مربع یا لوزی حول یک قطر خود دوران کند دو مخروط حاصل می شود .

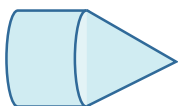
۱) شکل مقابل یک دوزنقه قائم الزاویه است. شکل حاصل از دوران آن حول ضلع AB و BC به ترتیب کدامند ؟



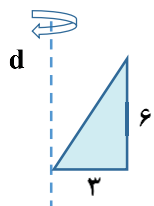
پاسخ: ☒



حول AB یک مخروط ناقص خواهد بود .



حول BC یک استوانه و یک مخروط خواهد بود



۲) اگر مثلث قائم الزاویه شکل روبرو را حول خط d دوران دهیم حجم شکل حاصل را به دست آورید .

پاسخ: ☒

با این دوران حجم حاصل عملاً تفاضل حجم استوانه از مخروط خواهد بود.

$$V = V_o - V_m = \pi(3)^2(6) - \frac{1}{3}\pi(3)^2(6) = 36\pi$$

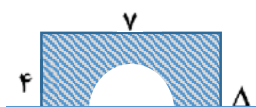
مجموع مورد نظر

مجموع مخروط

مجموع استوانه

۳) در شکل مقابل حجم حاصل از دوران شکل ، حول خط Δ هنگامی که قطر نیم دایره ۴ باشد را به دست آورید.

پاسخ: ☒



با این دوران حجم حاصل عملاً تفاضل حجم استوانه ای با شعاع ۴ و ارتفاع ۷ و یک کره با شعاع ۲ خواهد بود .

$$V = V_o - V_k = \pi(4)^2(7) - \frac{4}{3}\pi(2)^3 = \pi\left(\frac{304}{3}\right)$$

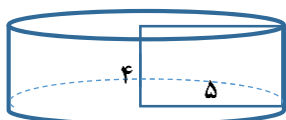
مجموع مورد نظر

مجموع کره

مجموع استوانه

۴) اگر مستطیلی به طول ۵ و عرض ۴ را حول عرضش دوران دهیم ، حجم جسم حاصل چقدر است ؟

پاسخ: ☒



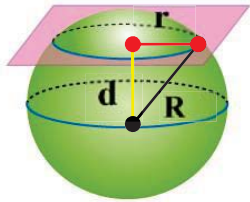
$$V = \pi r^2 h$$

$\Rightarrow$

$$V = \pi(5)^2(4) = 100\pi$$

(۵) کره ای به شعاع ۸ واحد، با صفحه ای که از مرکز کره ۴ واحد فاصله دارد برش می دهیم سطح مقطع حاصل چه قدر است ؟

پاسخ: ☒

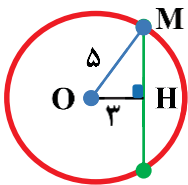


$$R^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$S = \pi r^2 = 48\pi$$

(۶) در استوانه ای که شعاع قاعده و ارتفاع آن به ترتیب ۵ و ۱۰ است صفحه ای موازی محور و به فاصله ۳ از محور آن را قطع می کند مساحت سطح مقطع چقدر است ؟

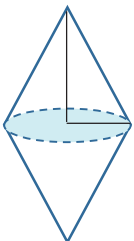
پاسخ: ☒



$$HM = \frac{L}{r} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow S = L \times h = 8 \times 10 = 80$$

(۷) یک لوزی با قطر های ۶ و ۸ را یک بار حول قطر بزرگ و بار دیگر حول قطر کوچکش دوران می دهیم. تفاضل حجم دو جسم ایجاد شده چقدر است ؟

پاسخ: ☒



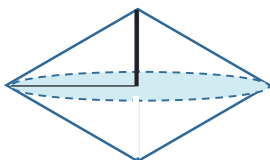
اپلیکیشن آموزشی مای درس

حجم مخروط از رابطه: $V = \frac{\pi}{3}(r)^2 h$ به دست می آید.

وقتی لوزی را حول قطر بزرگ آن دوران می دهیم دو مخروط با شعاع ۳ و ارتفاع ۴ خواهد بود

$$V_1 = 2\left(\frac{\pi}{3}\right)(3)^2(4) = 24\pi$$

که از قاعده به هم چسبیده اند و حجمشان می شود:



حال اگر لوزی را حول قطر کوچک آن دوران می دهیم دو مخروط با شعاع ۴ و ارتفاع ۳ خواهد بود

$$V_2 = 2\left(\frac{\pi}{3}\right)(4)^2(3) = 32\pi$$

که از قاعده به هم چسبیده اند و حجمشان می شود:

$$V_2 - V_1 = 32\pi - 24\pi = 8\pi$$



۸) مربع مقابل با ضلع ۴ را حول ضلع MN دوران می دهیم حجم حاصل از دوران ناحیه رنگ زده را محاسبه کنید .



✓ پاسخ:

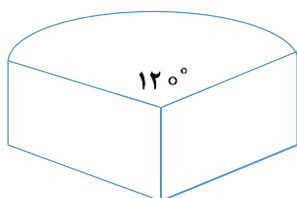
مربع را که دوران دهیم استوانه ای به حجم $V_o = \pi(r)^2 h = \pi(4)^2 (4) = 64\pi$ حاصل می شود حال حجم حاصل از دوران ربع دایره را محاسبه می کنیم که یک نیمکره می شود .

$$V_k = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = \frac{2\pi}{3} (4)^3 = \frac{2}{3} (64)\pi$$

$$V = V_o - V_k = \frac{64\pi}{3}$$

۹) مستطیلی با ابعاد ۳ و ۶ را حول ضلع کوچک آن ۱۲۰ درجه دوران می دهیم حجم شکل حاصل را به دست آورید .

✓ پاسخ:



شکل حاصل از دوران ۳۶۰ درجه کامل یک استوانه به شعاع قاعده ۶ و ارتفاع ۳ خواهد بود .

حال اگر دوران ۱۲۰ درجه انجام شود حجم حاصل $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$ حجم آن استوانه خواهد بود .

$$V = \frac{1}{3} (\pi R^2 h) = \frac{1}{3} (\pi (6^2) 3) = 36\pi$$

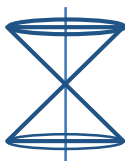
۱۰) جا های خالی را با عبارات مناسب پر کنید .

الف- شکل حاصل از دوران یک ربع دایره حول شعاع عمود بر قطر آن یک است .



✓ پاسخ: الف (نیمکره)

ب - شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه است .

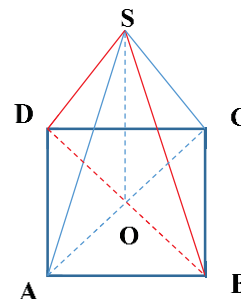


✓ پاسخ: ب (مخروط)

(۱۱) قاعده یک هرم منتظم مربعی به ضلع $\sqrt{2}$ است و یال های جانبی آن به طول $\sqrt{10}$ هستند. بیش ترین سطح مقطع گذرنده از راس و عمود بر قاعده این هرم را محاسبه کنید.

پاسخ: ☒

از بین تمام صفحات گذرا از راس و عمود بر قاعده بیشترین سطح مقطع زمانی حاصل می شود که این صفحه شامل یکی از قطر های مربع باشد

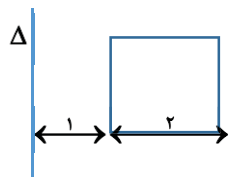


$$BD = \sqrt{2}BC \Rightarrow BD = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \Rightarrow BO = \frac{BD}{2} = 1$$

$$BS^2 = BO^2 + SO^2 \Rightarrow 10 = 1 + SO^2 \Rightarrow SO = 3$$

$$S_{(SBD)} = \frac{1}{2} BD \times SO = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$$

(۱۲) با توجه به شکل، مربع را حول خط Δ دوران می دهیم سطح کل شکل حاصل از دوران را محاسبه کنید.



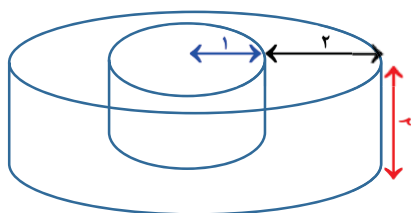
پاسخ: ☒ سطح جانبی یک استوانه با شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر $2\pi rh$ است

سطح جانبی بیرونی این شکل برابر مساحت جانبی استوانه ای به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۲: $2\pi rh = 2\pi(3)(2) = 12\pi$

سطح جانبی درونی این شکل برابر مساحت جانبی استوانه ای به شعاع قاعده ۱ و ارتفاع ۲: $2\pi rh = 2\pi(1)(2) = 4\pi$

رویه بالا و رویه پایین دایره ای به شعاع ۳ واحد است که دایره ای به شعاع یک از آن جدا شده است:

$$2\pi(3)^2 - 2\pi(1)^2 = 16\pi$$



$$S_k = 12\pi + 4\pi + 16\pi = 32\pi \text{ در کل داریم}$$

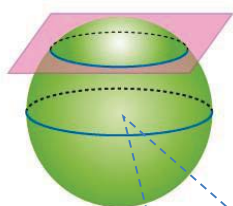


(۱۳) بیشترین مساحت مقطعی که از برخورد یک صفحه با کره ای با حجم 36π ایجاد می شود است

پاسخ: ☒ بیشترین سطح مقطع هنگامی حاصل می شود که صفحه از مرکز کره بگذرد بنابراین

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Rightarrow R^3 = 27 \Rightarrow R = 3$$

$$S = \pi R^2 = 9\pi$$

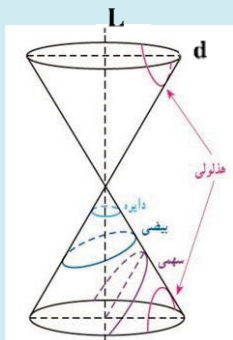


بیشترین مساحت برای این دایره است



رویه مخروطی

- اگر خط d را حول محور L (که با آن متقاطع است) دوران دهیم. دو تا مخروط ایجاد می شود که در راس به هم متصل شده اند. حال اگر رویه مخروطی را با صفحه p قطع دهیم. موارد زیر رخ می دهد.
- الف) صفحه p بر محور L عمود باشد. دایره حاصل می شود.
- ب) صفحه p بر محور L عمود نباشد و موازی مولد d هم نباشد بیضی حاصل می شود.
- ج) صفحه p موازی محور L مخروط باشد. هذلولی حاصل می شود.
- د) صفحه p موازی مولد d باشد. سهمی حاصل می شود.
- ه) صفحه p از راس دو مخروط بگذرد. نقطه حاصل می شود.



۱۴) جا های خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

- ۱ - شکل حاصل از دوران یک ربع دایره حول شعاع عمود بر قطر آن یک است.
- ۲ - شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه است.
- ۳ - شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن است.
- ۴ - اگر یک لوزی با طول قطر های ۶ و ۴ را حول قطر بزرگ آن دوران دهیم حجم شکل حاصل است.

پاسخ: ☒

۴) دو مخروط هم قاعده به حجم 8π

۳) دو مخروط هم قاعده

۲) مخروط

۱) نیمکره

- ۱۵) در کدام یک از حالت های زیر حاصل بر خورد صفحه ی p و یک سطح مخروطی، می تواند بیضی باشد ؟
- ۱) p بر محور سطح مخروطی عمود باشد.
 - ۲) p بر محور سطح مخروطی موازی باشد.
 - ۳) p بر مولد سطح مخروطی موازی باشد.
 - ۴) p بر مولد سطح مخروطی عمود باشد.

پاسخ: ☒

صفحه p بر محور L عمود نباشد و موازی مولد d هم نباشد بیضی حاصل می شود. گزینه ۴ درست است چون در این حالت وقتی p عمود بر مولد است شرایط فوق را دارد.

۱۶) چند مورد از گزاره های زیر درست است ؟

- ۱) اگر صفحه p بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از راس آن عبور نکند، شکل حاصل دایره است.
- ۲) اگر صفحه p بر محور سطح مخروطی عمود باشد، و از راس نگذرد، شکل حاصل بیضی است.
- ۳) اگر صفحه p در یکی از موقعیت ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از راس آن عبور نکند، شکل حاصل یک سهمی است.
- ۴) اگر صفحه p سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم قسمت پایینی قطع کند و از راس آن عبور کند. شکل حاصل هذلولی است.

پاسخ: ☒

فقط موارد ۱ و ۳ درست است



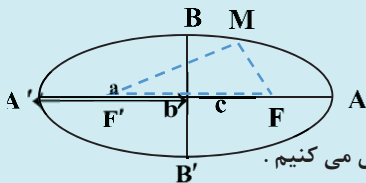
بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن ها از دو نقطه ثابت (کانون ها F , F') مقدار ثابت $2a$ است که $2a$ طول قطر بزرگ یا کانونی بیضی نامیده می شود .

$$AA' = 2a \quad , \quad BB' = 2b \quad , \quad FF' = 2c \quad , \quad MF + MF' = 2a$$

قطر کانونی

قطر نا کانونی

فاصله کانونی



در شکل مقابل

(۱) نقاط F و F' را کانون های بیضی می گوئیم .

(۲) فاصله بین دو کانون را که مقدار ثابتی است فاصله کانونی بیضی می گوئیم و آن را برابر $F'F = 2c$ فرض می کنیم .

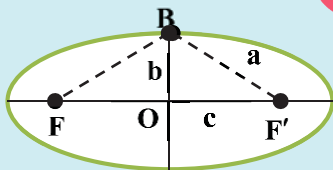
(۳) پاره خط $A'A$ را قطر بزرگ و محور کانونی و پاره خط $B'B$ را قطر کوچک و محور نا کانونی می گوئیم .



mydars

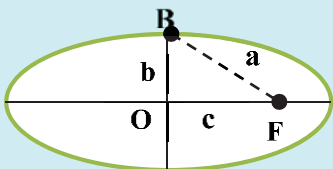
اپلیکیشن آموزشی مای درس

در بیضی فاصله هر راس ناکانونی از کانون برابر a است .



با توجه به شکل $BF = BF'$ و از طرفی B نقطه ای روی بیضی است بنابراین : $BF + BF' = 2a$

در نتیجه : $BF = BF' = a$



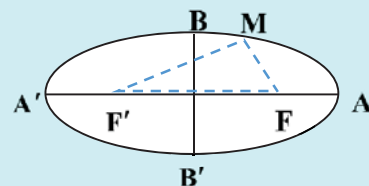
در شکل مقابل در مثلث قائم الزاویه BOF داریم : $a^2 = b^2 + c^2$ و در هر بیضی $a > b$, $a > c$

مختصات نقاط مهم در بیضی افقی

$$O = \frac{A + A'}{2} = \frac{B + B'}{2} = \frac{F + F'}{2}$$

وسط هر سه پاره خط AA' , BB' , FF' مرکز بیضی است

$$O \begin{cases} \alpha = \frac{x_A + x_{A'}}{2} = \frac{x_B + x_{B'}}{2} = \frac{x_F + x_{F'}}{2} \\ \beta = \frac{y_A + y_{A'}}{2} = \frac{y_B + y_{B'}}{2} = \frac{y_F + y_{F'}}{2} \end{cases}$$



$$O \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases} \quad A \begin{cases} \alpha + a \\ \beta \end{cases} \quad A' \begin{cases} \alpha - a \\ \beta \end{cases} \quad F \begin{cases} \alpha + c \\ \beta \end{cases} \quad F' \begin{cases} \alpha - c \\ \beta \end{cases} \quad B \begin{cases} \alpha \\ \beta + b \end{cases} \quad B' \begin{cases} \alpha \\ \beta - b \end{cases}$$

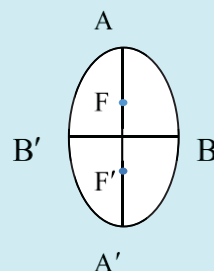


مختصات نقاط مهم در بیضی قائم

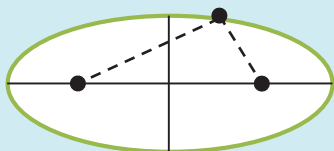
$$O = \frac{A+A'}{2} = \frac{B+B'}{2} = \frac{F+F'}{2}$$

$$O \begin{cases} \alpha = \frac{x_A + x_{A'}}{2} = \frac{x_B + x_{B'}}{2} = \frac{x_F + x_{F'}}{2} \\ \beta = \frac{y_A + y_{A'}}{2} = \frac{y_B + y_{B'}}{2} = \frac{y_F + y_{F'}}{2} \end{cases}$$

$$O \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} \quad A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta + a \end{vmatrix} \quad A' \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta - a \end{vmatrix} \quad F \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta + c \end{vmatrix} \quad F' \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta - c \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} \alpha + b \\ \beta \end{vmatrix} \quad B' \begin{vmatrix} \alpha - b \\ \beta \end{vmatrix}$$



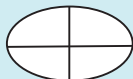
خروج از مرکز: خروج از مرکز : در هر بیضی نسبت $e = \frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می گویند .



$$\circ < FF' < MF + MF' \Rightarrow \circ < 2c < 2a \Rightarrow \circ < \frac{c}{a} = e < 1$$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

اگر a , b را داشته باشیم چون $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ خروج از مرکز از این رابطه نیز بدست می آید :

if $e \rightarrow 1$ if $e \rightarrow 0$ 

خروج از مرکز چاقی و لاغر بیضی را نشان می دهد هرچه کمتر تپل تر

۱۷) اگر در یک بیضی طول قطر کوچک ۲۴ و فاصله کانون تا مرکز آن برابر ۵ باشد ، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید .

پاسخ: ✓

$$2b = 24 \Rightarrow b = 12, \quad OF = 5 \Rightarrow c = 5$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow a = 13 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{5}{13}$$

۱۸) کانون های یک بیضی $F'(2,2)$, $F(14,2)$ هستند و خروج از مرکز آن $\frac{3}{5}$ است. A, A', B, B' را تعیین کنید و نمودار آن را رسم کنید.

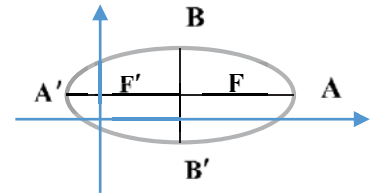
✓ پاسخ:

$$O = \frac{F+F'}{2} \Rightarrow O \begin{cases} \alpha = \frac{2+14}{2} = 8 \\ \beta = \frac{2+2}{2} = 2 \end{cases}, \quad 2c = |FF'| = \sqrt{(14-2)^2 + (2-2)^2} = 12 \Rightarrow c = 6$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{6}{a} \Rightarrow a = 10$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \Rightarrow A \begin{vmatrix} 8+10 \\ 2 \end{vmatrix} = 18 \quad A' \begin{vmatrix} 8-10 \\ 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$B \begin{vmatrix} 8 \\ 2+8=10 \end{vmatrix} \quad B' \begin{vmatrix} 8 \\ 2-8=-6 \end{vmatrix}$$



۱۹) اگر در یک بیضی داشته باشیم $F'(-3,2)$, $F(5,2)$, $B(1,4)$ آنگاه خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

✓ پاسخ:

$$O = \frac{F+F'}{2} \Rightarrow O \begin{cases} \alpha = \frac{-3+5}{2} = 1 \\ \beta = \frac{2+2}{2} = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2c = |FF'| = 5 - (-3) = 8 \Rightarrow c = 4 \\ B(\alpha, \beta+b) = (1, 4) \Rightarrow 2+b=4 \Rightarrow b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

۲۰) خروج از مرکز بیضی که $A' \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix}$ راس کانونی و $B' \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix}$ راس غیر کانونی آن باشد کدام است؟

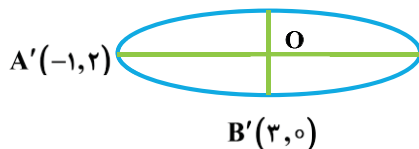
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

✓ پاسخ: گزینه ۴



با توجه به شکل مرکز و طول قطر های بیضی تعیین می شود.

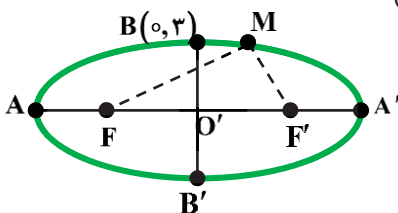
$$x_O = x_B, \quad y_O = y_A \Rightarrow O(2,2) \Rightarrow OB' = b = 2, \quad OA' = a = 4 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۲۱) اگر در بیضی مقابل مختصات کانون $F'(4,0)$ و مختصات راس $B(0,3)$ باشد: (دی ۱۴۰۱)

الف) قطر بزرگ بیضی را بیابید.

ب) محیط مثلث MFF' را تعیین کنید.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

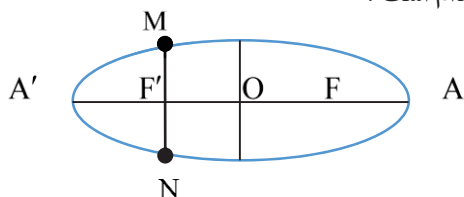
✓ پاسخ:

با توجه به شکل داریم $O'(0,0)$ و $c=4$, $b=3$ در نتیجه $a=5 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = 25$

$$\text{محیط مثلث } MFF' = p = |MF| + |MF'| + |FF'| = 2a + 2c = 18$$



(۲۲) در بیضی مقابل مبدا مختصات مرکز بیضی و فاصله کانون F از مرکز و راس A ۳ واحد است خطی که در کانون F' بر خط محور اصلی بیضی عمود است بیضی را در نقاط N, M قطع می کند فاصله نقطه N از A کدام است ؟



$$(1) \frac{9}{4}\sqrt{5} \quad (2) \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

$$(3) \frac{9}{2}\sqrt{5} \quad (4) \frac{9}{4}\sqrt{3}$$

پاسخ: گزینه ۳

می دانیم $NF + NF' = 2a$ و چون گفته $OF = FA = 3$ خواهیم داشت $a = 6 \Leftrightarrow 2a = 12$ و همچنین $F(-3, 0)$, $F(3, 0)$

$A(6, 0)$ و مختصات N هم $N\left(-3, \frac{-9}{h}\right)$ می شود در نتیجه :

$$NF' + NF = 2a \Rightarrow h + \left(\sqrt{(3+3)^2 + (0-h)^2} \right) = h + \sqrt{36 + h^2} = 12 \Rightarrow \sqrt{36 + h^2} = 12 - h \Rightarrow 36 + h^2 = 144 - 24h + h^2$$

$$h = \frac{9}{2} \Rightarrow N\left(-3, \frac{-9}{\frac{9}{2}}\right) = N(-3, -2) \quad A(6, 0) \Rightarrow NA = \sqrt{(6+3)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{9}{2}\sqrt{5}$$

(۲۳) در یک بیضی فاصله ی کانونی دو برابر طول قطر کوچک تر است . خروج از مرکز بیضی کدام است ؟

$$(1) \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (2) \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (3) \frac{4}{5} \quad (4) \frac{2}{5}$$

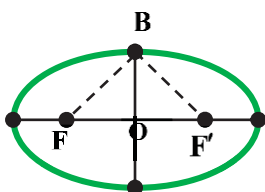
پاسخ:

$$c = 2b \Rightarrow a^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 + \frac{c^2}{4} = \frac{5c^2}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}}{2}c \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

(۲۴) در یک بیضی مثلث $BF'F$ متساوی الاضلاع است خروج از مرکز بیضی کدام است ؟

$$(1) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) \frac{1}{3} \quad (4) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

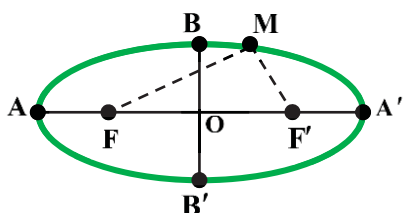
پاسخ:



$$BF = BF' = FF' = 2c \quad , \quad BF + BF' = 2a = 4c \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(۲۵) در یک بیضی $a = 5$ است و نقطه M روی بیضی چنان واقع است که : $MF - MF' = 6$. مقدار MF' را به دست آورید .

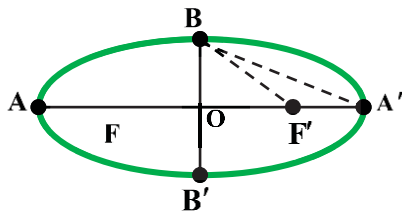
پاسخ:



$$\begin{cases} MF + MF' = 2a = 10 \\ MF - MF' = 6 \end{cases} \Rightarrow 2MF = 16 \Rightarrow MF = 8 \Rightarrow MF' = 2$$

(۲۶) در شکل مقابل اندازه قطر کوچک بیضی $\sqrt{128}$ و خروج از مرکز آن $\frac{1}{3}$ است مساحت مثلث $BA'F'$ را به دست آورید.

پاسخ:



$$2b = \sqrt{128} \Rightarrow b = 4\sqrt{2}, e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$a = 3c, F'A' = a - c = a - \frac{a}{3} = \frac{2}{3}a$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 32 + \frac{a^2}{9} \Rightarrow \frac{8a^2}{9} = 32 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow c = 2$$

$$S_{BA'F'} = \frac{1}{2}(b)(a-c) = \frac{1}{2}(4\sqrt{2})4 = 8\sqrt{2}$$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

(۲۷) F' و F کانون های یک بیضی با خروج از مرکز e هستند. دایره ای به قطر FF' این بیضی را در چهار نقطه قطع می کند کدام گزینه همواره درست است ؟

(۴) $0 < e < \frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{2} < e < 1$

(۲) $0 < e < \frac{\sqrt{2}}{2}$

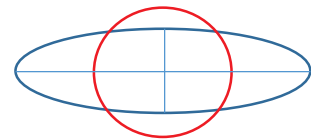
(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2} < e < 1$

پاسخ:

چون دایره به قطر FF' بیضی را در چهار نقطه قطع می کند باید $b < c$ باشد. در نتیجه داریم :

$$b < c \Rightarrow \sqrt{a^2 - c^2} < c \Rightarrow a^2 - c^2 < c^2 \Rightarrow 2c^2 > a^2$$

$$\frac{c^2}{a^2} > \frac{1}{2} \Rightarrow e^2 > \frac{1}{2} \xrightarrow{0 < e < 1} \frac{\sqrt{2}}{2} < e < 1$$



فاصله ی نزدیک ترین نقطه ی محیط بیضی تا مرکز آن برابر b و فاصله ی دورترین نقطه ی محیط بیضی تا مرکز آن برابر a .. است

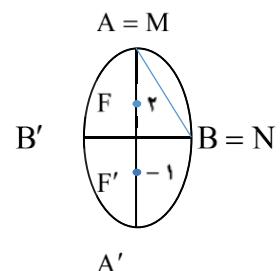
(۲۸) دو نقطه با عرض های -1 و 2 واقع بر محور y ها، کانون های یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{6}{10}$ هستند. اگر M و N به ترتیب دورترین و نزدیکترین نقاط این بیضی نسبت به مرکز آن باشند، طول پاره خط MN کدام است ؟

$$e = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

پاسخ: با توجه به شکل $FF' = 2 - (-1) = 3$ و داریم :

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 2$$

$$MN = AB = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 4} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$





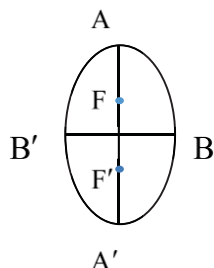
۲۹) کانون های یک بیضی نقاط $(1, 3)$, $(1, -5)$ است (خرداد ۱۴۰۰)

الف (فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید

ب (اگر $a=6$ باشد اندازه قطر کوچک بیضی را به دست آورید. (a اندازه نصف قطر بزرگ بیضی است)

$$2c = 3 - (-5) = 8 \Rightarrow c = 4$$

پاسخ: ☒



$$\alpha = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\beta = \frac{-5+3}{2} = -1$$

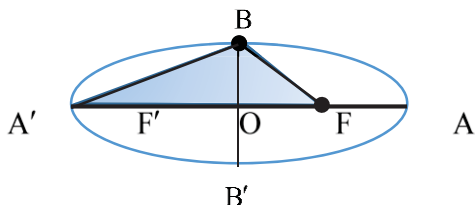
مختصات مرکز بیضی :

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow 2b = 4\sqrt{5}$$

۳۰) اگر طول قطر بزرگ بیضی AA' و قطر کوچک بیضی BB' به ترتیب ۱۰، ۸ باشد (خرداد ۱۴۰۱)

الف (مقدار $A'F$ را به دست آورید .

ب (مساحت مثلث هاشور زده $BA'F$ چقدر است .



$$a = 5, b = 4 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$$

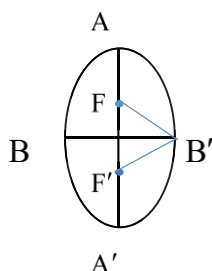
پاسخ: ☒ الف (

$$|A'F| = a + c = 5 + 3 = 8$$

$$S_{BA'F} = \frac{|A'F| \times |OB|}{2} = \frac{(a+c) \times b}{2} = \frac{(5+3) \times (4)}{2} = 16$$

ب (

۳۱) در بیضی مقابل کانون ها به مختصات $F(1, 5)$, $F'(1, 1)$ و یک راس قطر بزرگ آن $A(1, 6)$ می باشد. (خرداد ۱۴۰۲)



الف (فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید .

ب (معادله قطر کوچک بیضی را بنویسید .

ج (مساحت مثلث $B'FF'$ را به دست آورید .

پاسخ: ☒ با توجه به مختصات دو کانون بیضی قائم است

$$\alpha = \frac{1+1}{2} = 1, \beta = \frac{1+5}{2} = 3 \Rightarrow 2c = 5 - 1 = 4 \Rightarrow c = 2, a = 3 \Rightarrow b = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

الف (

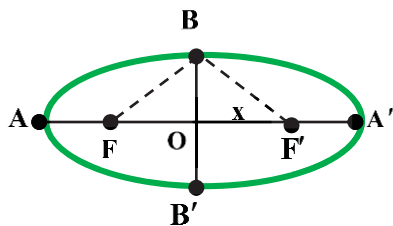
معادله قطر کوچک بیضی $y = 3$

ب (

$$S_{B'FF'} = \frac{|F'F| \times |OB|}{2} = \frac{(2c) \times b}{2} = \frac{(4) \times (\sqrt{5})}{2} = 2\sqrt{5}$$

ج (

(۳۲) در بیضی مقابل اگر $\sin x = \frac{1}{3}$ باشد محیط مثلث BFF' چند برابر قطر کوچک بیضی است ؟



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

پاسخ: ✓

$$\sin x = \frac{OB}{BF'} = \frac{b}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3b$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2\sqrt{2}b = c$$

$$P_{BFF'} = BF + BF' + FF' \Rightarrow P_{BFF'} = 2a + 2c \Rightarrow \frac{P_{BFF'}}{2b} = \frac{2a + 2c}{2b} = \frac{3b + 2\sqrt{2}b}{b} = 3 + 2\sqrt{2}$$

(۳۳) در یک بیضی فاصله کانونی با طول قطر کوچک آن برابر است. خروج از مرکز بیضی را بیابید. (خرداد ۱۴۰۳)

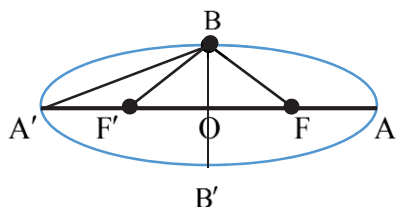
پاسخ: ✓

$$FF' = BB' \Rightarrow c = b$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 2c^2 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{2}c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(۳۴) یک بیضی به مرکز O و کانون های F, F' مطابق شکل روبرو مفروض است اگر $4S_{\triangle FBF'} = S_{\triangle BOA'}$ خروج از مرکز بیضی را به دست آورید. (هندسه ۳ خرداد ۱۴۰۳)

پاسخ: ✓



$$\frac{S_{FBF'}}{S_{BOA'}} = \frac{\frac{1}{2} \times 2c \times b}{\frac{1}{2} \times a \times b} = \frac{c}{a} = \frac{1}{4} = e$$

(۳۵) مختصات کانون های بیضی $F(4, 2)$, $F'(-2, 2)$ است. این بیضی از نقطه $M(1, 1)$ می گذرد. طول قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

پاسخ: ✓

$$MF + MF' = 2a \Rightarrow \sqrt{3^2 + 1^2} + \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = 2\sqrt{10} = 2a \Rightarrow a = \sqrt{10}$$

$$FF' = \sqrt{6^2 + 0} = 6 \Rightarrow c = 3$$

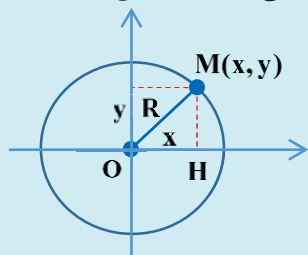
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{10 - 9} = 1$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$



دایره

دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله این نقاط از یک نقطه ثابت (مرکز)، همواره مقدار ثابتی است. (شعاع)



حالا دقت کن: $|OM| = R$ و مرکز دایره O و نقطه شناور روی محیط دایره است. در مثلث قائم الزاویه OHM داریم: $OH^2 + HM^2 = OM^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2$ این معادله دایره ای به مرکز مبدا مختصات به شعاع R می باشد.

معادله استاندارد دایره: معادله دایره ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع R به صورت: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ است.

معادله فرم گسترده دایره: اگر معادله فرم استاندارد دایره را بسط دهیم و مرتب بنویسیم فرم گسترده معادله دایره را خواهیم داشت.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ در این حالت داریم:}$$

$$\begin{cases} a = -2\alpha \\ b = -2\beta \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - R^2 \end{cases} \Rightarrow O \begin{cases} \alpha = \frac{-a}{2} \\ \beta = \frac{-b}{2} \end{cases}, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c}$$

(۱) در فرم گسترده باید ضرایب x^2 , y^2 برابر باشند و همواره باید: $a^2 + b^2 - 4c > 0$

(۲) برای نوشتن معادله دایره داشتن مختصات مرکز و شعاع دایره الزامی است مگر آنکه در مسئله اطلاعاتی بدهند که بتوان آنها را محاسبه کرد.

(۳) در نوشتن و حل مسائل دایره از رسم کردن غافل نشوید به خصوص هنگامی که ایده خاصی ندارید و چیزی به ذهنتان نمی رسد. پیاده کردن داده های مسئله روی شکل راه حل را به ذهن ما القاء می کند.

(۴) در بعضی از سوالات میگویم مرکز دایره روی خط $y = mx + n$ قرار دارد و یا میگویم $y = mx + n$ معادله یک قطر دایره است. در این سوالات مرکز را به

صورت $O \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases} = m\alpha + n$ نشان دهید.

(۳۶) اگر مرکز دایره $x^2 + y^2 + ax - 4y - 4 = 0$ نقطه $O(1, 2)$ باشد. (خرداد ۱۴۰۳)

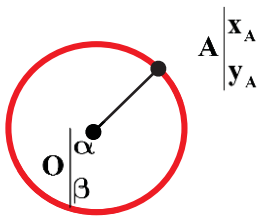
الف) مقدار a را بیابید. ب) شعاع دایره را محاسبه کنید.

✓ پاسخ:

$$\text{الف) } \alpha = \frac{-A}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{-a}{2} = 1 \Rightarrow a = -2$$

$$\text{ب) } R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 16} = 3$$

۱) معادله دایره به مرکز معلوم و مختصات یک نقطه از آن



اول فاصله مرکز تا نقطه روی دایره را بدست می آوریم. همیشه شعاع بعد معادله دایره را می نویسیم

$$R = |OA| = \sqrt{(x_A - \alpha)^2 + (y_A - \beta)^2}, \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

۳۷) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(3, 2)$ و $M(1, 1)$ نقطه ای روی آن باشد.

پاسخ: ☒

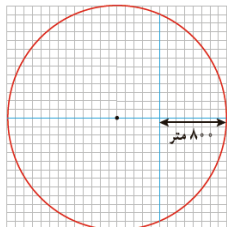
$$R = |OM| = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$$

۳۸) معادله گسترده یک دایره به شکل $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بیابید (دی ۱۴۰۱)

$$O \begin{cases} -\frac{a}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\ -\frac{b}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 32} = \sqrt{10} \\ R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 - (-8)} = \sqrt{10} \end{cases}$$

پاسخ: ☒

۳۹) شهرداری قصد دارد در یک فضای سبز دایره ای شکل به شعاع ۱۳۰۰ متر، دو مسیر پیاده روی مطابق شکل بسازد. اگر مختصات مرکز دایره $(13, 13)$ و هر واحد برابر ۱۰۰ متر باشد:



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

الف) معادله این دایره چیست؟

ب) مختصات نقاط برخورد دو مسیر را با دایره پیدا کنید.

پ) دو مسیر در چه نقطه ای با یکدیگر متقاطع اند؟

ت) طول مسیر عمودی چقدر است؟

پاسخ: ☒

$$(x-13)^2 + (y-13)^2 = 169$$

$$x=18 \Rightarrow 25 + (y-13)^2 = 169 \Rightarrow (y-13)^2 = 144 \Rightarrow \begin{cases} y-13=12 \Rightarrow y=25 \\ y-13=-12 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

$$A(18, 1), \quad B(18, 25)$$

$$AB = 25 - 1 = 24 \Rightarrow 2400 \text{ متر}$$



۴۰) در حالت های زیر معادله دایره را بنویسید .

الف) دایره ای که از مبدا مختصات بگذرد و مرکز آن $C(2, -1)$ باشد .

ب) دایره ای که مرکز آن $(2, 3)$ و نقطه $(-3, -9)$ نقطه ای روی آن باشد .

ج) دایره ای که از نقاط $(0, 3)$ و $(-4, -1)$ دو سر یکی از قطر های آن باشند .

پاسخ: ☒

$$OC = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{5} = R \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

$$CA = \sqrt{(2+3)^2 + (3+9)^2} = 13 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 169$$

$$C = \left(\frac{0+(-4)}{2} = -2, \frac{-1+3}{2} = 1 \right), \quad 2R = \sqrt{(-4-0)^2 + (-1-3)^2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

۴۱) مرکز و شعاع دایره $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ را تعیین کنید .

پاسخ: ☒

راه اول: از راه مربع کامل نمودن و تبدیل به معادله استاندارد

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 - 1 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$$

$$O \begin{cases} \alpha = \frac{-a}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \beta = \frac{-b}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 16 - 28} = \frac{2}{2} = 1$$

راه دوم: استفاده از فرمول:

۴۲) به ازای کدام مقادیر m معادله $2x^2 + (m^2 - 7)y^2 + 4y + m = 0$ یک دایره است ؟

پاسخ: ☒

$$m^2 - 7 = 2 \Rightarrow m = \pm 3$$

برای دایره بودن باید ضرایب x^2 و y^2 برابر باشند. پس:

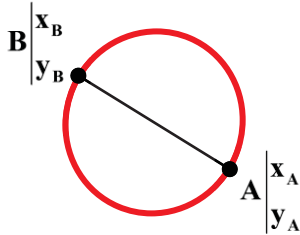
$$A^2 + B^2 - 4C > 0$$

$$m = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2y + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 0 + 4 - 4\left(\frac{3}{2}\right) < 0$$

$$m = -3 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2y - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 0 + 4 - 4\left(-\frac{3}{2}\right) > 0$$

بنابراین $m = -3$ قابل قبول است .

۲) معادله دایره با داشتن مختصات دو سر قطر



اول طول قطر را به دست آورده و نصف اون میشه شعاع و بعدشم مختصات وسط قطر رو به دست می آوریم و معادله فرم استاندارد دایره رو می نویسیم .

۴۳) معادله دایره ای را بنویسید که نقاط $A(2, 4)$, $B(-2, 2)$ دو سر یک قطر آن باشند .

پاسخ: ☒

$$O = \frac{A+B}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-2+2}{2} = 0 \\ \beta = \frac{2+4}{2} = 3 \end{cases}, \quad R = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{(2+2)^2 + (4-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}$$

$$(x-0)^2 + (y-3)^2 = 5$$

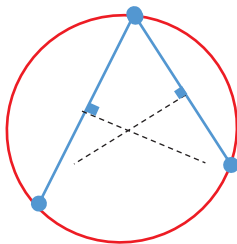


mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

۳) معادله دایره با داشتن مختصات ۳ نقطه واقع بر آن

کافیه در معادله فرم گسترده دایره $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ مختصات ۳ نقطه را جایگذاری کنیم و یک دستگاه ۳ معادله سه مجهول رو حل کنیم و مقادیر a, b, c را به دست بیاوریم . (راه دیگه ای بخاطر تون میاد ؟) پیرس بهت میگم



۴۴) شعاع دایره ای گذرا از سه نقطه $A(2, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(0, 0)$ را به دست آورید .

پاسخ: ☒

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4 + 1 + 2a + b + c = 0 \\ 4 + 16 - 2a + 4b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -5 \\ -2a + 4b = -20 \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = -5$$

$$x^2 + y^2 - 5y = 0 \Rightarrow O(0, \frac{5}{2}), \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{25} = \frac{5}{2}$$



۴۵) مرکز دایره گذرا بر سه نقطه $(1, 3)$ و $(-2, 4)$ و $(0, 2)$ کدام است؟

(۱) $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ (۲) $(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ (۳) $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ (۴) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

پاسخ: گزینه ی (۳) صحیح است.

معادله کلی دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. مختصات هر سه نقطه در آن صدق می کند.

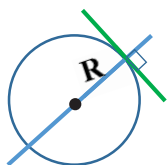
$$\begin{cases} a + 3b + c = -10 \\ -2a + 4b + c = -20 \\ 2b + c = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10b + 3c = -40 \\ 6b + 3c = -12 \end{cases} \Rightarrow b = -7, c = 10, a = 1$$

در نتیجه $x^2 + y^2 + x - 7y + 10 = 0$ و مرکز دایره به مختصات $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ است.

۴) معادله ی دایره ای که بر یک خط مماس است

یادآوری: خطی که از مرکز دایره می گذرد بردایره عمود است دایره تنها منحنی است که قائم های بر آن همواره از مرکز می گذرند.

فاصله مرکز دایره از خط مماس بردایره برابر شعاع دایره است

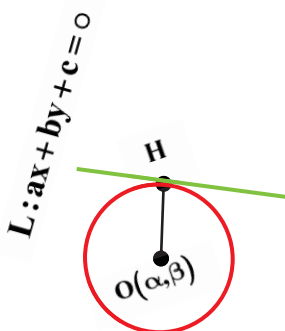


$$OH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = R$$

اول فاصله مرکز دایره را از خط داده شده حساب می کنیم .

حالا معادله استاندارد دایره به راحتی نوشته میشه چون شعاع و مرکز رو داری

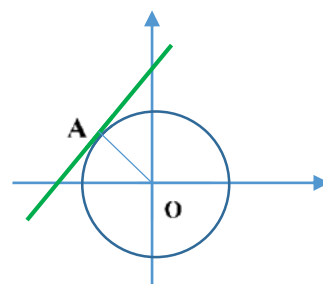
$$C(O, R): (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$



۴۶) اگر بدانیم خط L در نقطه $(-3, 4)$ بر دایره ای به مرکز مبداء مختصات مماس است. معادله خط مماس را بنویسید.

پاسخ:

$$M_{OA} = \frac{4}{-3} \Rightarrow M' = \frac{3}{4} \Rightarrow L_A: y - 4 = \frac{3}{4}(x + 3)$$



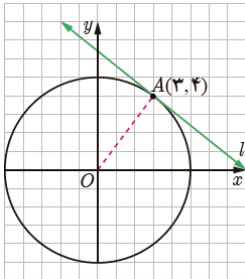
۴۷) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $(3, 0)$ و بر خط $3x - 4y = 3$ مماس باشد.

پاسخ: ✓

$$d = \frac{|3(0) - 4(3) - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{5} = 3 = R \quad \Rightarrow \quad (x-0)^2 + (y-3)^2 = 9$$

۴۸) اگر بدانیم خط L در نقطه $(3, 4)$ بر دایره ای به مرکز مبداء مختصات مماس است معادله خط مماس چیست ؟

پاسخ: ✓



$$OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 = R \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 25$$

$$m_{OA} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad m' = -\frac{3}{4}, \quad A \left| \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right. \Rightarrow y-4 = -\frac{3}{4}(x-3)$$

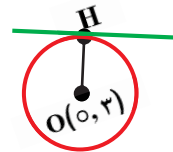
۴۹) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(0, 3)$ و بر خط $3x - 4y = 3$ مماس باشد (خرداد ۱۴۰۱)

$$R = \frac{|3(0) - 4(3) - 3|}{\sqrt{9+16}} = 3$$

$$C(0,3): (x-0)^2 + (y-3)^2 = 3^2 = 9$$

$$L: 3x - 4y - 3 = 0$$

پاسخ: ✓



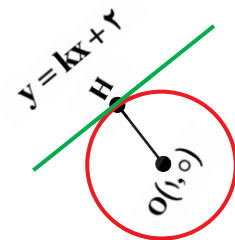
۵۰) به ازای کدام مقادیر k خط به معادله $y = kx + 2$ بر دایره $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ مماس است ؟

پاسخ: ✓

فاصله مرکز دایره تا خط مماس را به دست آورده و برابر شعاع در نظر می گیریم .

$$O(1,0), \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{4+12} = 2 \quad \Rightarrow \quad OH = \frac{|0-k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 2$$

$$\frac{(k+2)^2}{k^2+1} = 4 \quad \Rightarrow \quad k^2 + 4k + 4 = 4k^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad 3k^2 - 4k = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k=0 \\ k=\frac{4}{3} \end{cases}$$



۵۱) معادله دایره ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$, $x-y=3$ قطر های آن بوده و بر خط به معادله $4x+3y+5=0$ مماس باشد.

پاسخ: ✓

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow x=2, y=-1 \Rightarrow O'(2,-1)$$

$$R = \frac{|4(2) + 3(-1) + 5|}{\sqrt{16+9}} = \frac{10}{5} = 2 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$$



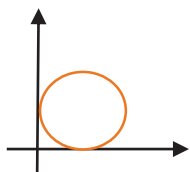
mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



۵۲) نقطه ی $A(3, 6)$ روی دایره ای است که بر هر محور مختصات مماس است. شعاع این دایره کدام است؟ (خارج کشور ۸۶)

۱) و ۱۲ ۲) و ۱۵ ۳) و ۹ ۴) و ۳ و ۱۵



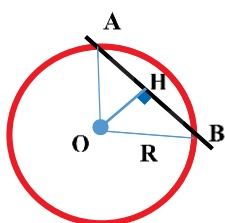
پاسخ: با توجه به مختصات نقطه داده شده دایره در ناحیه اول بر دو محور مماس است

نقطه باید در معادله صدق کند

$$(x-R)^2 + (y-R)^2 = R^2 \quad \xrightarrow{\text{نقطه باید در معادله صدق کند}} \quad (3-R)^2 + (6-R)^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$R^2 - 18R + 45 = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 3, \quad R = 15$$

۵) معادله دایره ای که از یک خط $(L: ax + by + c = 0)$ وتری با طول معلوم (d) جدا می کند.



این مهمه: یادت باشه خطی که از مرکز دایره بر وتر وارد و بر آن عمود باشد آن را نصف می کند. بنابراین: $|HB| = \frac{d}{2}$

و از طرفی $|OH| = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ و $OH^2 + HB^2 = R^2$ بنابراین شعاع دایره را هم داریم:

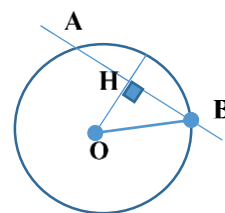
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

۵۳) دایره ای به مرکز $O(1, -1)$ خط $\frac{3}{4}x - 2y + 4 = 0$ را در دو نقطه قطع می کند و طول وتر ایجاد شده ۸ است معادله این دایره را بنویسید.

پاسخ: خطی که از مرکز دایره بر وتر وارد و بر آن عمود باشد آن را نصف می کند.

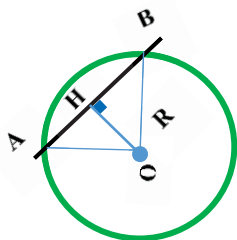
$$OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\frac{3}{4} + 2 + 4|}{\sqrt{\frac{9}{16} + 4}} = \frac{7/4}{\sqrt{\frac{67}{16}}} = \frac{7/4}{\sqrt{67}/4} = \frac{7}{\sqrt{67}} \Rightarrow OH = \frac{15}{5} = 3$$

$$R^2 = OH^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow R = 5 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$$



۵۴) خط $5x + 12y = 14$ دایره ی $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8$ را در نقاط A, B قطع می کند فاصله A از B را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا فاصله مرکز دایره را تا خط پیدا می کنیم سپس به کمک فیثاغورس HB را تعیین می کنیم.



$$x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-4)^2 = 25$$

$$O(1, 4), \quad R = \sqrt{1 + 16 + 8} = 5 \Rightarrow OH = \frac{|5 + 48 - 14|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{39}{13} = 3$$

$$HB = \sqrt{R^2 - OH^2} = 4 \Rightarrow AB = 8$$

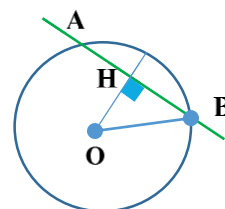
۵۵) دایره ای به مرکز $O(1, -1)$ خط $\frac{3}{2}x - 2y + 4 = 0$ را در دو نقطه قطع می کند و طول وتر ایجاد شده ۸ است این دایره از کدام نقطه می گذرد؟

- (۱) $(4, 3)$ (۲) $(3, 4)$ (۳) $(2, 5)$ (۴) $(6, 1)$

✓ پاسخ: گزینه ۱

خطی که از مرکز دایره بر وتر وارد و بر آن عمود باشد آن را نصف می کند.

$$OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|\frac{3}{2} + 2 + 4\right|}{\sqrt{\frac{9}{4} + 4}} = \frac{7/2}{5/2} \Rightarrow OH = \frac{7}{5} = 1.4$$

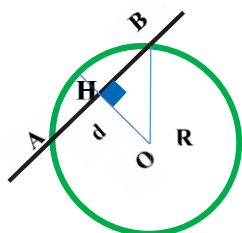


$$R^2 = OH^2 + (4)^2 = 1.96 + 16 = 17.96 \Rightarrow R = 4.24 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 17.96$$

مختصات $(4, 3)$ در آن صدق می کند؟

۵۶) مرکز دایره ای نقطه $O(2, -3)$ است این دایره روی خط به معادله $3x - 4y + 2 = 0$ وتری با طول ۶ جدا می کند معادله دایره را بنویسید.
(خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:



$$OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(2) - 4(-3) + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} \Rightarrow OH = 4$$

$$R^2 = OH^2 + HB^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow R = 5 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



وضعیت دو دایره



۱- مختصات مراکز دو دایره و همچنین شعاع هریک را به تعیین کنید.

۲- فاصله دو مرکز دایره یعنی $d = |O_1O_2|$ را حساب کنید.

۳- $R_1 + R_2$ ، $|R_1 - R_2|$ را محاسبه کنید.

۴- d را با $R_1 + R_2$ ، $|R_1 - R_2|$ مقایسه کنید.

$d > R_1 + R_2$	متقاطع	
$d = R_1 + R_2$	مماس خارج	
$ R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$	متقاطع	
$d = R_1 - R_2 $	مماس داخل	
$d < R_1 - R_2 $	متداخل	
$d = 0$	هم مرکز	

۵۷) دو دایره به معادلات :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$
 نسبت به هم چگونه اند ؟

پاسخ: ☒

۱) $O_1(2, -4)$ ، $R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 64 - 76} = 1$

۲) $O_2(2, -2)$ ، $R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 16 + 4} = 2$ ، $\begin{cases} R_1 + R_2 = 4 \\ |R_1 - R_2| = 2 \end{cases} \Rightarrow d = |R_1 - R_2| = 2$ مماس داخل اند

۳) $d = |O_1O_2| = \sqrt{(2-2)^2 + (-2+4)^2} = 2$

۵۸) وضعیت دو دایره $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ ، $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$ نسبت به هم را تعیین کنید.

پاسخ: ☒

$O_1(1, 1)$ ، $R_1 = 2$ ، $O_2(4, 1)$ ، $R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 64 - 52} = \frac{1}{2}\sqrt{16} = 2$

$d = |O_1O_2| = |4-1| = 3$ ، $R_1 + R_2 = 2 + 2 = 4$ ، $|R_1 - R_2| = 0$ ، $|R_1 - R_2| < 0, O_2 = d < R_1 + R_2$

دو دایره متقاطع اند.

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0 \end{array} \right. \quad \text{نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟}$$

(۴) متقاطع اند

(۳) متخارجند

(۲) مماس داخلند

(۱) مماس خارج اند

پاسخ: ☒

$$O \left| \begin{array}{l} \alpha = \frac{-a}{2} \\ \beta = \frac{-b}{2} \end{array} \right. \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

$$O_1 \left| \begin{array}{l} 1 \\ -2 \end{array} \right. , \quad R_1 = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 4} = 2 , \quad O_2 \left| \begin{array}{l} -3 \\ 0 \end{array} \right. , \quad R_2 = \frac{1}{2} \sqrt{36 - 20} = 2 , \quad O_1 O_2 = d = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$$

چون $d > R_1 + R_2$ متخارجند.

(۶۰) مشخص کنید در حالت های زیر دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

$$\text{الف} \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4 , \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y = 9$$

$$\text{ب} \quad (x-2)^2 + (y+3)^2 = 7 , \quad x^2 + (y-5)^2 = 5$$



اپلیکیشن آموزشی مای درس

پاسخ: ☒

الف (متقاطع

$$O \left| \begin{array}{l} 1 \\ -2 \end{array} \right. \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 16} = 3 , \quad O' \left| \begin{array}{l} -1 \\ 2 \end{array} \right. \quad R' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 36} = \sqrt{14}$$

$$OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-2)^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow R - R' < OO' < R + R'$$

ب (متخارج

$$O \left| \begin{array}{l} 2 \\ -3 \end{array} \right. \quad R = \sqrt{7} , \quad O' \left| \begin{array}{l} 0 \\ 5 \end{array} \right. \quad R' = \sqrt{5}$$

$$OO' = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-5)^2} = 2\sqrt{17} \Rightarrow OO' > R + R'$$

(۶۱) اگر دو دایره به معادله های $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$, $(x-2)^2 + (y+1)^2 = m^2$ مماس خارج باشند مقدار m را بیابید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: ☒باید $R_1 + R_2 = d$ در نتیجه :

$$O_1(-1, 2) , \quad R_1 = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 4} = 2 , \quad O_2(2, -1) , \quad R_2 = |m|$$

$$d = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} = 2 + |m| \Rightarrow |m| = 3\sqrt{2} - 2$$



۶۲) دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x = 8$ و $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

- (۱) متقاطع (۲) متداخل (۳) برون هم (۴) مماس درونی

پاسخ: گزینه (۱) صحیح است.

$$(x-1)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow O(1,0), R_1 = 3$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 13 \Rightarrow O'(-2,3), R_2 = \sqrt{13}$$

معادلات استاندارد هر دو دایره را می‌نویسیم

فاصله مرکزهای دو دایره $OO' = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ چون $R_2 - R_1 < OO' < R_2 + R_1$ پس دو دایره متقاطع هستند.

۶۳) معادله دایره ای را بنویسید که بر دایره $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ مماس بیرون و مرکز آن $(2, -2)$ باشد.

پاسخ:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \Rightarrow O\left(-1, 2\right), R = \frac{1}{2}\sqrt{4+16+16} = 3$$

$$d = |O_1 O_2| = \sqrt{(-1-2)^2 + (2+2)^2} = 5$$

برای اینکه این دو بر هم مماس بیرون باشند باید: $d = R_1 + R_2$ در نتیجه

$$5 = R + 3 \Rightarrow R = 2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

۶۴) معادله دایره را بنویسید که مرکز آن $(-1, -1)$ و با دایره $x^2 + y^2 - 3x - 6y = 3$ مماس درونی باشد.

پاسخ:

$$x^2 + y^2 - 3x - 6y = 3 \Rightarrow O(2,3), R = \frac{1}{2}\sqrt{16+36+12} = 4$$

$$5 = R - 4 \Rightarrow R = 9 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 81$$

برای آنکه مماس داخل باشند. باید $d = |R - R'|$

۶۵) وضعیت دایره به معادله $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ با دایره به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۱ را تعیین کنید. (خرداد ۱۴۰۰ هندسه ۳)

پاسخ:

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0 \Rightarrow O'(3,1), R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{36+4-36} = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow d = |OO'| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \Rightarrow R_1 + R_2 = 2 < d = \sqrt{10}$$

پس دو دایره متخارجند

۶۶) مقدار c را چنان تعیین کنید تا دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 2y + c = 0$ بر دایره $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$ مماس بیرون باشد. ✓ پاسخ:
(خرداد ۱۴۰۲ هندسه ۳)

باید داشته باشیم $d = R_1 + R_2$

$$O(1, -1), R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, O'(-1, 1), R_2 = \sqrt{2}, d = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8-4c} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8-4c} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{8-4c} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 8-4c = 8 \Rightarrow c = 0$$



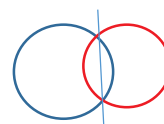
mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

وتر مشترک

اگر دو دایره برهند $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ و وتر مشترک آنها را بفیابند کافی است معادلات آنها را از هم کم کنیم.

$$L: (a-a')x + (b-b')y + (c-c') = 0$$



۶۷) معادله وتر مشترک دو دایره $x^2 + y^2 + mx + y - 3 = 0$ و $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 3 = 0$ خط $y = 6x$ است مقدار m را تعیین کنید.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 2y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + mx + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (m-4)x - y = 0 \Rightarrow y = (m-4)x \Rightarrow m-4=6 \Rightarrow m=10$$
 ✓ پاسخ:

۶۸) وتر مشترک دو دایره $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 1 = 0$ و $x^2 + y^2 + 8x + 2y = 82$ ، محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند.

مختصات نقطه‌ی وسط پاره خط AB کدام است؟

$$\left(\frac{23}{2}, \frac{-23}{2}\right) (1) \quad \left(\frac{-23}{2}, \frac{23}{2}\right) (2) \quad \left(\frac{-13}{2}, \frac{-13}{2}\right) (3) \quad \left(\frac{23}{2}, \frac{-23}{2}\right) (4)$$

✓ پاسخ: گزینه‌ی (۱) صحیح است.

معادله‌ی وتر مشترک دو دایره را به دست می‌آوریم: یعنی معادله استاندارد دو دایره را از هم کم می‌کنیم.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x + 2y - 82 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x + 6y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x - 4y - 92 = 0$$

معادله‌ی وتر مشترک $y = x - 23$: اکنون توجه کنید که وتر مشترک محورهای مختصات را در نقاط $A(0, -23)$ و $B(23, 0)$ قطع می‌کند که وسط

این نقاط، نقطه‌ی $\left(\frac{23}{2}, \frac{-23}{2}\right)$ می‌باشد.



۶۹) دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4a = 0$ بر محور x ها در نقطه M مماس است اگر این دایره محور y ها را در نقاط P, Q قطع کند مساحت مثلث MPQ کدام است ؟

$$3\sqrt{5} \quad (۴)$$

$$2\sqrt{5} \quad (۳)$$

$$3 \quad (۲)$$

$$2 \quad (۱)$$

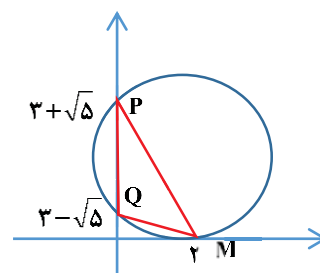
✓ پاسخ: چون گفته بر محور x ها مماس است .

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4a = 0 \xrightarrow{y=0} x^2 - 4x + 4a = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 16a = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0 \xrightarrow{x=0} y^2 - 6y + 4 = 0 \Rightarrow y = 3 \pm \sqrt{5}$$

$$S = \frac{(3 + \sqrt{5} - 3 + \sqrt{5})(2)}{2} = 2\sqrt{5}$$



۷۰) طول وتری که دایره $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 4y - 2 = 0$ از محور y ها جدا می کند چند برابر طول وتری است که از محور x ها جدا می کند ؟

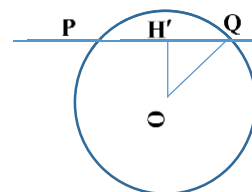
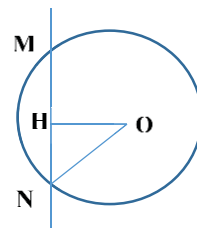
✓ پاسخ:

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 4y - 2 = 0 \Rightarrow O'(\sqrt{2}, -2), R = \frac{1}{2}\sqrt{8 + 16 + 8} = 2\sqrt{2}$$

$$MN = 2\sqrt{(ON)^2 - (OH)^2} = 2\sqrt{8 - 2} = 2\sqrt{6}$$

$$PQ = 2\sqrt{(OQ')^2 - (OH')^2} = 2\sqrt{8 - 4} = 4$$

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{2\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



۷۱) معادله دایره ای که از نقاط $A(1, 2)$, $B(3, 0)$ گذشته و مرکز آن روی خط $y = 2x - 1$ است را تعیین کنید .

✓ پاسخ:

$$y = 2x - 1 \Rightarrow O(\alpha, 2\alpha - 1) \Rightarrow OA = OB$$

$$\Rightarrow (\alpha - 1)^2 + (2\alpha - 1 - 2)^2 = (\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2$$

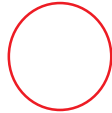
$$\Rightarrow 5\alpha^2 - 10\alpha + 10 = 5\alpha^2 - 14\alpha + 10 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\Rightarrow R = OA = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 10$$

تعیین وضعیت یک نقطه نسبت به یک دایره

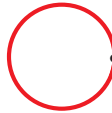


۱- در معادله فرم گسترده دایره مختصات نقطه داده شده را جای گذاری می کنیم آنگاه :

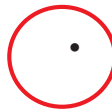


$$\bullet M \begin{vmatrix} x_M \\ y_M \end{vmatrix}$$

۲- اگر $p(x_m, y_m) > 0$ نقطه خارج دایره قرار دارد .



۳- اگر $p(x_m, y_m) = 0$ نقطه روی دایره قرار دارد .



۴- اگر $p(x_m, y_m) < 0$ نقطه بیرون دایره قرار دارد .

۷۲) وضعیت نقاط $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, -2)$, $(0, 0)$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ مشخص کنید .

پاسخ: ☒

$$p(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

$$p(1, 0) = 1 + 0 - 2 + 0 + 1 = 0 \quad \text{روی دایره}$$

$$p(0, 0) = 1 > 0 \quad \text{خارج دایره}$$

$$p(-1, -2) = 1 + 4 + 2 - 8 + 1 = 0 \quad \text{روی دایره}$$

$$p(0, -1) = 1 - 4 + 1 < 0 \quad \text{داخل دایره}$$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

۷۳) وضعیت نقطه $A(1, -2)$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ را تعیین کنید (هندسه ۳ ریاضی خرداد ۱۳۹۹)

پاسخ: ☒

$$p(1, -2) = 1 + 4 - 2 - 4 = -1 < 0 \quad \text{نقطه داخل دایره قرار دارد چون :}$$

۷۴) معادله دایره $(x+1)^2 + y^2 = 4$ می باشد وضعیت آن نسبت به نقطه $A(2, -1)$ چگونه است . نقاط تلاقی آن با محور x ها را تعیین کنید .

پاسخ: ☒

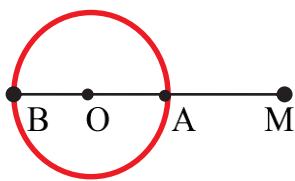
$$O(-1, 0), R=2, \quad |AO| = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{10} \Rightarrow |AO| = \sqrt{10} > R=2$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 4 \xrightarrow{y=0} (x+1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x+1=2 \\ x+1=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(1, 0) \\ N(-3, 0) \end{cases} \quad \bullet A \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$$

پس نقطه A بیرون دایره است اینم راه دوم : $(x+1)^2 + y^2 - 4 = 0 \quad P(2, -1) = 9 + 1 - 4 = 6 > 0$



بیشترین و کمترین فاصله نقطه تا محیط دایره



اول فاصله نقطه را از مرکز دایره حساب می کنیم سپس شعاع دایره را تعیین می کنیم
آنگاه خواهیم داشت .

$$\text{فاصله نقطه تا مرکز} = |OM| = d$$

$$\text{بیشترین فاصله} = |BM| = d + R$$

$$\text{کمترین فاصله} = |AM| = d - R$$

۷۵) بیشترین و کمترین فاصله نقاط دایره ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ از نقطه $A(4, 2)$ چقدر است ؟

پاسخ: ☒

$$O(1, -2), \quad R = \sqrt{1+4+4} = 3, \quad |OA| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow |OA| \pm R = 5 \pm 3 = \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases}$$

تعیین وضعیت یک خط و یک دایره نسبت به هم

دایره به معادله ی $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ و خط به معادله ی $L: ax + by + c = 0$

$$O \begin{cases} \alpha = \frac{-A}{2} \\ \beta = \frac{-B}{2} \end{cases}, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$$

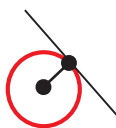
اول مرکز دایره و شعاع دایره را تعیین می کنیم. اینطوری :

$$h = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

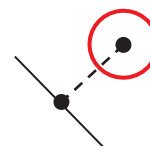
فاصله مرکز دایره را از خط داده شده حساب می کنیم. اینطوری :



$$h < R$$



$$h = R$$



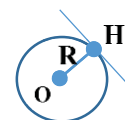
$$h > R$$

۷۶) وضعیت خط به معادله $3x + 4y + 7 = 0$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ چگونه است .

پاسخ: ☒

$$O \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{4+12} = 2, \quad OH = \frac{|3+7|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow OH = R$$

خط و دایره بر هم مماس اند



(۷۷) وضعیت خط $x + y = 3$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ را تعیین کنید. (شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ: ☒

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow O(1, 0), R = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 12} = 2 \Rightarrow d = \frac{|1 + 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} < R = 2$$

پس خط و دایره متقاطع اند.



(۷۸) وضع خط های زیر را نسبت به دایره مشخص کنید.

الف) $6x + 4y = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$

ب) $y = -x - 2$, $x^2 + y^2 = 2$

پاسخ: ☒



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

$$O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, R = \sqrt{2}$$

$$O \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix}, R = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 16 - 28} = 1$$

$$x + y + 2 = 0 \Rightarrow d = \frac{|0 + 0 + 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{2}$$

$$d = \frac{|6(2) + 4(2)|}{\sqrt{36 + 16}} = \frac{20}{\sqrt{52}} = \frac{10\sqrt{13}}{13}$$

$$d = R = \sqrt{2} \quad \text{خط بر دایره مماس است}$$

$$d = \frac{10\sqrt{13}}{13} > R = 1 \quad \text{خط و دایره غیر متقاطع}$$

(۷۹) در هر دایره مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آن را پیدا کنید، محل تقاطع هر دایره را با محور های مختصات، در صورت وجود مشخص کنید و درستی پاسخ خود را با کمک رسم دایره بررسی کنید.

پاسخ: ☒

$$O \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}, R = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C} = \sqrt{3^2 + 1 - 4} = 3$$

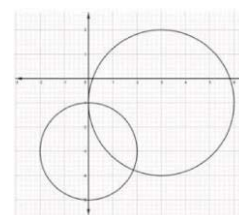
الف) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$

$$O \begin{vmatrix} 0 \\ -3 \end{vmatrix}, R = 2$$

ب) $x^2 + (y + 3)^2 - 4 = 0$

$$x = 0 \Rightarrow (y + 3)^2 = 4 \Rightarrow y = -1, y = -5$$

$$y = 0 \Rightarrow x^2 + 9 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -5$$



(۸۰) معادله گسترده یک دایره به شکل $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آن را پیدا کنید و معادله آن را به شکل استاندارد بنویسید.

پاسخ: ☒

$$O \begin{vmatrix} \alpha = \frac{-A}{2} = -1 \\ \beta = \frac{-B}{2} = -1 \end{vmatrix}, R = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4 + 32} = \sqrt{10}, (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 10$$



۸۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آن ها از نقطه $A(2, 4)$ ، $\sqrt{2}$ برابر فاصله آن ها از نقطه $B(1, 2)$ باشد را تعیین کنید .

پاسخ: ✓

$$M(x, y) \Rightarrow MA = \sqrt{2}MB \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20 = 2(x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5) \Rightarrow x^2 + y^2 = 10$$

میشه یک دایره به مرکز مبدا مختصات و شعاع $\sqrt{10}$

۸۲) با ازاء چند مقدار k نمودار $kx^2 + \frac{y^2}{k} = 2x + k^2 - 3$ دایره است ؟

(۱) دو مقدار (۲) بی شمار (۳) یک مقدار (۴) هیچ

پاسخ: ✓ باید ضرایب x^2 و y^2 با هم برابر و ترجیحاً ۱ باشند .

$$k = \frac{1}{k} \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$$

$$\text{if } k = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 4c > 0 \Rightarrow 4 - 8 < 0$$

$$\text{if } k = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 4c > 0 \Rightarrow 4 + 8 > 0$$

قابل قبول

۸۳) فاصله مرکز دایره $C(O, R = x^2 + 1)$ تا خط d برابر ۵ است به ازای چه مقدار x خط d دایره را قطع می کند .

پاسخ: ✓

$$R = x^2 + 1 > 5 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

۸۴) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(-1, 1)$ و با دایره $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3$ مماس درونی باشد .

پاسخ: ✓

$$O'(-1, 1), O(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}) = (2, -3), R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 4, d = OO' = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$d = OO' = |R' - R| \quad \Delta = |R' - 4| \Rightarrow R' = 9$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 81$$

۸۵) معادله دایره ای را بنویسید که عرض مرکز آن سه برابر طول مرکز آن بوده و خط $D: 2y - x = 5$ قطری از آن و خط $L: 4x - 3y = 5$ مماس بر دایره باشد .

$$O \begin{vmatrix} x \\ 3x \end{vmatrix} \Rightarrow 6x - x = 5 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow O \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$$

پاسخ: ✓

$$R = \frac{|4(1) - 3(3) - 5|}{\sqrt{16 + 9}} = 2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$$



متفاوت بودن را با ما تجربه کنید

کیمیای ماهان

در آکادمی

تحلیل
آزمون

آزمون

آموزش

مشاوره



دهم
یازدهم
دوازدهم



kimiamahan.ir



۰۹۱۲۱۸۵۹۷۸۰