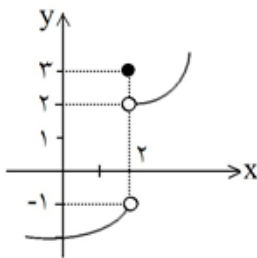


۱ نمودار تابع f شکل مقابل است. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ کدام است؟

- ۰ (۱)
- ۱/۵ (۲)
- ۲ (۳)
- ۳ (۴)



۲ شکل مقابل نمودار تابع است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - f(2)$ کدام است؟

- ۲ (۱)
- ۰ (۲)
- ۲ (۳)
- ۴ (۴)

۳ اگر $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ ، مقدار a کدام است؟

- ۱ (۴)
- ۲ (۳)
- ۳ (۲)
- ۴ (۱)

۴ به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & ; x \geq -1 \\ 2x+1 & ; x < -1 \end{cases}$ در نقطه $x = -1$ حد دارد؟

- $\mathbb{R}$ (۴)
- $\emptyset$ (۳)
- $\{2\}$ (۲)
- $\{0\}$ (۱)





۵ حاصل $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+3}{\sqrt{x+3}}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۳

۶ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - [x]}{[x] + [x]}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۷ به ازای کدام مقدار از a تابع $f(x) = [x+1] + a[x]$ در نقطه $x=0$ دارای حد است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۸ حد عبارت $(1-x+[x]-[2x])$ وقتی $x \rightarrow 1^-$ کدام است؟ ([] به معنی جزء صحیح است.)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۹ حد چپ تابع $y = \frac{x-|x|}{[x+1]-x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟ ([] جزء صحیح است.)

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) -۲

۱۰ در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & ; x > 0 \\ -\sqrt{1+x} & ; x \leq 0 \end{cases}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) موجود نیست.

۱۱ مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} [2\sin x - 1]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) وجود ندارد.



۱۲ حد عبارت $\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right] \cos^3 x + \left[\operatorname{tg}^2 x \right]$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (نماد [] به مفهوم جزء

صحیح است.)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) حد ندارد

۱۳ حد راست عبارت $[x]$ از حد چپ آن در نقطه $x = -2$ چقدر بیش تر است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- ۱ (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲ (۴)

۱۴ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱ (۴)

۱۵ قدرمطلق تفاضل حد چپ و راست تابع f به معادله $y = \frac{2x^2 - x - 1}{|x - 1|}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

۱۶ اگر $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = 2$ آنگاه a کدام است؟

- ۵ (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) -۵ (۴)

۱۷ حد عبارت $\frac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x^2-9}$ وقتی $x \rightarrow 3$ برابر کدام است؟

- ۰ (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{18}$ (۴)



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس





۱۸

حد عبارت $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{7+\sqrt{x}}-3}$ وقتی که $x \rightarrow 4$ کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

۱۹

حد تابع $y = \frac{x + \sqrt{2-x}}{\sqrt{-4x+1}-3}$ وقتی $x \rightarrow -2$ چقدر است؟

 $-\frac{9}{8}$ (۴) $\frac{9}{8}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۱)

۲۰

حد عبارت $\frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2}$ وقتی $x \rightarrow -2$ برابر کدام است؟

 $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۱)

۲۱

حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x^3+1}$ کدام است؟

۲ (۴)

-۲ (۳)

 $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۱)

۲۲

حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}}$ کدام است؟

 $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۱)



۲۳ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) $+\infty$

۲۴ اگر تابع f در نقطه $x = 1$ حد داشته و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{f(x) + 1} = 1$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۵ تابع با ضابطه $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$ را در نظر می‌گیریم، حد راست این تابع چقدر از حد چپ این تابع در $x = 0$ بیشتر است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۲۶ حد چپ تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3 - [x]}{x - 3} \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ در نقطه $x = 3$ ، کدام است؟ [] نماد جزء صحیح است.

- (۱) ۰ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) $-\infty$

۲۷ اگر حد $\frac{x^3 + 2ax^2 - x - 2a}{ax^2 + x(1 - a) - 1}$ وقتی $x \rightarrow 1$ برابر ۱ باشد، a چقدر است؟

- (۱) -۳ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۳

۲۸ کدام گزینه در مورد حدود تابع $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$ در نقطه $x = 0$ صحیح است؟

- (۱) حد موجود است (۲) حد چپ موجود نیست
(۳) حد چپ و راست موجود نیست (۴) حد چپ و راست موجود است ولی برابر نیستند



۲۹

به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۳۰

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{-x + |x-2|}{x-1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x = 1$ پیوسته است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۳۱

تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & |x| \leq 2 \\ \frac{1}{2}x - 1 & |x| > 2 \end{cases}$ کدام است؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشمار

۳۲

تابع f با ضابطه $f(x) = (x-1)[x]$ بر بازه $[0, 2]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

(۱) سه (۲) دو (۳) یک (۴) هیچ

۳۳

تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه: $3 < x < 6$; $f(x) = x - [x] + \sin\left(\frac{\pi}{2}[x]\right)$ ، کدام است؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۴

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x-|x|}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مجموعه مقادیر a در $x = 0$ پیوسته است؟

(۱) $\{0\}$ (۲) $\emptyset$ (۳) $\{2\}$ (۴) $\{0, 2\}$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



۲۵ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (x+3)[x] & x < 3 \\ Ax+3 & 3 \leq x \end{cases}$ در نقطه‌ای به طول ۳ پیوسته باشد. مقدار A چیست؟ [] علامت جزء صحیح است

۲ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۲۶ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ -2x & -1 \leq x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$ از نظر پیوستگی در کدام گزینه صدق می‌کند؟

(۱) در ۱ پیوسته و در ۱ از چپ پیوسته
(۲) در ۱ ناپیوسته و در ۱ از راست پیوسته
(۳) در ۱ ناپیوسته و در ۱ از چپ پیوسته
(۴) در ۱ پیوسته و در ۱ از راست پیوسته

۳۷ مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{16-x^2} & |x| \leq 4 \\ x-4 & |x| > 4 \end{cases}$ کدام است؟

(۱) $\{-4\}$ (۲) $\{4\}$ (۳) $\{-4, 4\}$ (۴) $\emptyset$

۳۸ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} |x+3| & x \neq -3 \\ 3 & x = -3 \end{cases}$ در نقطه $x = -3$

(۱) از چپ پیوسته نیست و از راست پیوسته نیست.
(۲) فقط از راست پیوسته است.
(۳) فقط از چپ پیوسته است.
(۴) هم از راست و هم از چپ پیوسته است.

۳۹ اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & x < 1 \\ bx - 1 & x > 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$ بر R پیوسته باشد، $a + b$ چقدر است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴۰ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x > 2 \\ x^2 + 1 & x < 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ پیوستگی چپ داشته باشد، $f(2)$ کدام است؟

(۱) $f(2) - 3$ (۲) $f(2) - 2$ (۳) $f(2) - 1$ (۴) $f(2)$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



۴۱

به ازای کدام مقدار A ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + |x|}{x^2 - 2|x|} & x \neq 0 \\ A & x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۲

۴۲

به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} 3x + \frac{|2x|}{x} & x \neq 0 \\ a - 3 & x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوستگی چپ دارد؟

(۱) -۱ (۲) -۵ (۳) ۱ (۴) ۵

۴۳

مجموعه طول‌های نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x}{x^2 - 1} & x \neq \pm 1 \\ -1 & x = \pm 1 \end{cases}$ کدام است؟

(۱) $\{1, -1\}$ (۲) $\{-1\}$ (۳) $\{1\}$ (۴) $\emptyset$

۴۴

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$ در $x = 1$ چه مقدار تعریف شود تا در این نقطه پیوستگی راست داشته باشد؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) -۱

۴۵

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ -x + 3 & x > 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ از نظر پیوستگی در کدام گزینه صدق می‌کند؟

(۱) پیوسته است (۲) پیوستگی چپ دارد (۳) پیوستگی چپ و راست ندارد (۴) پیوستگی راست دارد



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



۴۶

به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x} & ; x \neq 1 \\ \frac{1-x}{a} & ; x = 1 \end{cases}$ بر روی اعداد حقیقی غیر منفی پیوسته است؟

- ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴)

۴۷

فرض کنیم که $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(\sqrt{x+8}-2) & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$. اگر f در نقطه صفر پیوسته باشد، آنگاه مقدار a کدام است؟

- $\frac{1}{12}$ (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴)

۴۸

اگر تابع $y = \begin{cases} x - a & x < 1 \\ ax + 2 & x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ متصل باشد، a کدام است؟

- ۲ (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴)

۴۹

اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 2x + ax & x > 2 \\ ax^2 + 1 & x \leq 2 \end{cases}$ در R پیوسته باشد، a چقدر است؟

- $\frac{2}{3}$ (۱) $\frac{2}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴)

۵۰

به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^2 - 1} & x \neq \pm 1 \\ a & x = \pm 1 \end{cases}$ ، همواره پیوسته است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۵۱

اگر تابعی در نقطه x_0 از چپ و از راست باشد، در آن نقطه

- (۱) پیوسته - پیوسته - پیوسته است. (۲) پیوسته - حد داشته باشد - حد دارد. (۳) حد - حد داشته - حد دارد. (۴) حد داشته - حد داشته - پیوسته است.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



۵۲

تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} & ; |x| > 1 \\ ax + b & ; |x| \leq 1 \end{cases}$ روی R پیوسته است. دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

(۱) $(0, 1)$ (۲) $(1, 0)$ (۳) $(0, 2)$ (۴) $(2, 0)$

۵۳

به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & x < 2 \\ a + 2\sin \frac{\pi}{x} & x \geq 2 \end{cases}$ در بازه $[0, 3]$ پیوسته است؟ $([])$ نماد جزء صحیح است.

(۱) -2 (۲) -1 (۳) 0 (۴) 1

۵۴

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin x + 2\cos x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -\cos 2x & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ با تعریف $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ از نظر پیوستگی در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ چگونه است؟

(۱) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته
(۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته
(۳) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته
(۴) از چپ پیوسته - از راست پیوسته

۵۵

تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}} & x > 1 \\ ax - a + 4 & x \leq 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در R پیوسته است؟

(۱) هیچ مقدار a (۲) هر مقدار حقیقی a (۳) فقط $a = 0$ (۴) فقط $a = 4$

۵۶

تابع $f(x) = [2\sin x]$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟ $([])$ تابع جزء صحیح است.

(۱) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته
(۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته
(۳) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته
(۴) از چپ پیوسته - از راست پیوسته



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



۵۷

در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{2x} & ; x \neq 2 \\ a & ; x = 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x = 2$ پیوسته است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۵۸

به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 5 & ; x > 2 \\ ax - 1 & ; x < 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

- (۱) هر مقدار حقیقی a فقط $a = 2$ (۲) فقط $a = -2$ (۳) فقط $a = -2$ (۴) هیچ مقدار a

۵۹

به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & ; x < 2 \\ a & ; x = 2 \\ x + 2 & ; x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ پیوسته است؟

- (۱) ۴ (۲) $4/5$ (۳) ۵ (۴) هیچ مقدار a

۶۰

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & |x| > 1 \\ 2x & |x| \leq 1 \end{cases}$ از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های ۱ و -۱ چگونه است؟

- (۱) در (-۱) ناپیوسته - در ۱ ناپیوسته (۲) در (-۱) ناپیوسته - در ۱ پیوسته
(۳) در (-۱) پیوسته - در ۱ پیوسته (۴) در (-۱) پیوسته - در ۱ ناپیوسته

۶۱

حد عبارت $\frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس





mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

۶۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1}$ کدام است؟

(۴) -۷۲

(۳) -۸۴

(۲) -۹۶ $x \rightarrow 4$

(۱) -۱۱۲

۶۳ حد عبارت $\frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt[3]{x}}$ وقتی $x \rightarrow -8$ کدام است؟

(۴) -۶

(۳) -۱۲

(۲) -۱۸

(۱) -۲۴

۶۴ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x} + 1}$ کدام است؟

(۴) -۰/۶

(۳) -۰/۸

(۲) -۱/۲ $x \rightarrow 1$

(۱) -۱/۵

۶۵ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax + 2^{x-3} & ; x < 3 \\ a \log_2(1+x) & ; x \geq 3 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 3$ پیوسته است، $f(2)$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) -۱/۵

(۱) -۲

۶۶ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} a + \sin 2x & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ b \cos 2x & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$ با شرط $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ پیوسته است.

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) -۴

$a - b$ کدام است؟

(۱) -۵



۶۷

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + x - 2|}{x - 1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقادیر a در R پیوسته است؟

(۱) هر مقدار a (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار a

۶۸

اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b & |x| \geq 1 \\ x[x] & |x| < 1 \end{cases}$ روی R پیوسته باشد، نمودار این تابع خط $x = 3$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۶۹

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، در نقطه‌ی $x = 0$ پیوسته است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۷۰

به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{a(1 + \sqrt{1-x})}{x^2 - 2x} & x > 2 \\ x - a & x \leq 2 \end{cases}$ همواره پیوسته است؟

(۱) $1/2$ (۲) $1/6$ (۳) $2/4$ (۴) $3/2$

۷۱

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x+2}} & x > 2 \\ ax - 1 & x \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی، پیوسته است؟

(۱) $1/5$ (۲) ۲ (۳) $2/5$ (۴) ۳



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



۷۲

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{8+x^3}{|x+2|} & ; x \neq -2 \\ a & ; x = -2 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = -2$ ، فقط از چپ پیوسته است؟

۱۲ (۴)

۶ (۳)

-۶ (۲)

-۱۲ (۱)

۷۳

فرض کنید $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & ; |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & ; |x-1| \geq 1 \end{cases}$ یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a ، کدام است؟

 $\frac{5}{2}$ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

 $-\frac{3}{2}$ (۱)

۷۴

فرض کنید $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ و $f(x) = 1 - x^2$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

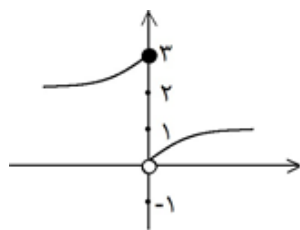
صفر (۱)



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس





گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مقدار تابع در نقطه صفر: } f(0) = 3 \\ \text{حد راست: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \\ \text{حد چپ: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + 3 = 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 \\ f(2) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - f(2) = 2 - 1 - 3 = -2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2a) = 1 + 2a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - 1) = a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \Rightarrow (1 + 2a) - (a - 1) = -1 \Rightarrow a = -1 - 2 = -3$$

باید حد چپ و راست در $x = -1$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند پس:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + a)^2 = (-1 + a)^2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x + 1) = 2(-1) + 1 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow (-1 + a)^2 = -1 \Rightarrow \text{امکان ندارد}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+3}{\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(\sqrt{x+3})^2}{\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \sqrt{x+3} = 0$$

پس گزینه ۲ صحیح است. باید توجه نمود که $\sqrt{x+3}$ در نقطه $x = -3$ فقط حد راست دارد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - [x]}{2|x| + [x]} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - (-1)}{2(-x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x + 1}{-2x - 1} = -1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷

می‌دانیم: $K \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x+K] = [x] + K$ و نیز تابع $[x]$ در $x \in \mathbb{Z}$ حد ندارد چون حد چپ و راست آن برابر نیست. (حد راست آن برابر x و حد چپ آن $x-1$ می‌باشد) برای اینکه تابع دارای حد باشد، باید $[x]$ حذف شود:

$$f(x) = [x+1] + a[x] = [x] + 1 + a[x] \Rightarrow$$

$$[x] + a[x] = 0 \Rightarrow [x](1+a) = 0 \Rightarrow 1+a = 0 \Rightarrow a = -1$$

روش دوم: حد چپ و راست تابع $f(x) = a[x] + [x] + 1$ را در نقطه صفر برابر قرار می‌دهیم.

$$\text{حد چپ } f(x) = -a - 1 + 1 = -a, \text{ حد راست } f(x) = 0 + 0 + 1 = 1 \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1$$

تابع جزء صحیح در محل نقاط صحیح تغییر می‌کند پس اگر $0 < x < 1$ باشد $[x] = 0$ می‌باشد و همچنین اگر $1 < 2x < 2$ باشد، $[2x] = 1$ می‌باشد. پس داریم: ۸

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} [2x] = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x + [x] - [2x]) = 1 - 1 + 0 - 1 = -1$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۹

چون $0 < x+1 < 1$ است پس $[x+1] = 0$ حال حد چپ را بدست می‌آوریم:

$$\text{حد } y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - (-x)}{0 - x} = \frac{2x}{-x} = -2$$

لازم به ذکر است که چون $x \rightarrow 0^-$ پس $x < 0$ است پس $|x| = -x$ می‌باشد. بنابراین جواب -۲ بوده.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۱۰)

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0 \quad (x=1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x) = f(0^-) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1-x} = 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در $\sin x$ اگر x در همسایگی چپ $\frac{\pi}{6}$ باشد، حاصل از $\frac{1}{6}$ کمتر است. (۱۱)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} [2 \sin x] - 1 = [1^-] - 1 = -1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این که درون جزء صحیح عدد صحیح می شود باید حد راست و چپ را جدا حساب کرد. (۱۲)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} \left[\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right] \cos 3x + [tg^2 x] = [0^+](1) + [3^+] = 0 + 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \left[\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right] \cos 3x + [tg^2 x] = [0^-](1) + [3^-] = 0 + 2 = 2$$

چون حد راست و چپ برابر ۳ است بنابراین حاصل حد ۳ می شود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۱۳)

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \lim_{x \rightarrow -2^+} 2[x] = 2[-2^+] = -4 \\ l_2 &= \lim_{x \rightarrow -2^-} 2[x] = 2[-2^-] = -6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow l_1 - l_2 = -4 - (-6) = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۱۴)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 0 \times \sin \left(0 + \frac{\pi}{6} \right) = 0 \times \frac{1}{2} = 0$$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

ابتدا حد چپ و راست تابع را محاسبه می‌کنیم، در حد چپ چون مقدار قدر مطلق منفی است داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(2x + 1)}{-(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(2x + 1) = -3$$

در حد راست چون مقدار قدر مطلق مثبت است داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(2x + 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 3$$

قدر مطلق تفاضل حد چپ و راست برابر است با:

$$\left| \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right| = |3 - (-3)| = 6$$

$$I = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} \xrightarrow{\text{هویتال}} I = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{a}{\frac{-5}{2\sqrt{5x + 16}}} = \frac{a}{\frac{-5}{2}} = \frac{2a}{-5} = 2 \Rightarrow a = -5$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



با استفاده از اتحاد $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ صورت کسر را گویا می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x^2-9} = \frac{(\sqrt[3]{x-2}-1)(\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x-2} + 1)}{(x^2-9)(\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x-2} + 1)}$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{x-2}^3 - 1^3)}{(x^2-9)(\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x-2} + 1)} = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)(\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x-2} + 1)}$$

با حذف $x=3$ از صورت و مخرج و جایگزینی $x=3$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{6(\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} + 1)} = \frac{1}{18}$$

بنابراین گزینه‌ی ۴ جواب صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}}{2x} = \frac{\frac{1}{6}}{6} = \frac{1}{18}$$

راه حل دوم: با استفاده از قضیه هوییتال:

حد عبارت بصورت $\frac{0}{0}$ است و برای رفع ابهام صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم و عامل صفر کننده را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{7+\sqrt{x}}-3} \times \frac{\sqrt{7+\sqrt{x}}+3}{\sqrt{7+\sqrt{x}}+3} = \frac{(\sqrt{x-2})(\sqrt{7+\sqrt{x}}+3)}{7+\sqrt{x}-9} = \sqrt{7+\sqrt{x}}+3$$

در حالت $x \rightarrow 4$ حد عبارت حاصل $\sqrt{7+\sqrt{x}}+3 = 6$ است و گزینه ۳ جواب صحیح است.

روش دوم: با استفاده از قاعده هوییتال:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{7+\sqrt{x}}-3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{4} = 6$$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



از روش هوییتال استفاده می‌کنیم زیرا کسر در $x = -2$ بصورت $\frac{0}{0}$ می‌باشد. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2-x}}{\sqrt{-4x+1}-3} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1 + \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{\frac{-4}{2\sqrt{-4x+1}}}$$

با جایگزینی $x = -2$ حد تابع بصورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1 + \frac{-1}{4}}{\frac{-4}{6}} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{9}{8}$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + \sqrt{2x+8})(x - \sqrt{2x+8})}{(x+2)(x - \sqrt{2x+8})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{(x+2)(x - \sqrt{2x+8})} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x - \sqrt{2x+8})} = \frac{-6}{-2-2} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.
تذکر: این مساله با قاعده هوییتال ساده‌تر حل می‌شود.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



۲۱

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x^3 + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x^3 + 1} \times \frac{x - \sqrt{x+2}}{x - \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{(x^3 + 1)(x - \sqrt{x+2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2 - x + 1)(x - \sqrt{x+2})} = \frac{-1 - 2}{((-1)^2 - (-1) + 1)(-1 - \sqrt{-1+2})} = \frac{-3}{3 \times (-2)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
تذکر: این حد به کمک قاعده هوییتال به سادگی قابل حل است.

۲۲

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{-1}{\sqrt{2x+1}}}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲۳

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\tan x} = -1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۲۴

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{f(x) + 1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} 2f(x) - 1 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 1 \Rightarrow 2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 + 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۲۵

حد چپ و راست تابع وقتی $x \rightarrow 0$ را باید محاسبه کنیم. داریم:

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x, \quad \frac{|x|}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + 1 = 1$$

محاسبه حد راست:

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x, \quad \frac{|x|}{x} = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 - 1 = -1$$

محاسبه حد چپ:

$$\text{حد راست} - \text{حد چپ} = 1 - (-1) = 2$$

پس گزینه ۴ صحیح است.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۲۶)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3 - [x]}{x - 3} \sqrt{x^2 - 6x + 9} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3 - [x]}{x - 3} \sqrt{(x - 3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3 - [x]}{x - 3} |x - 3| \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (3 - [x]) \left(\frac{|x - 3|}{x - 3} \right) = (3 - [3 - \varepsilon]) \left(\frac{|3 - \varepsilon - 3|}{3 - \varepsilon - 3} \right) = (3 - 2) \frac{\varepsilon}{-\varepsilon} = -1 \end{aligned}$$

با فاکتورگیری مناسب از صورت و منخرج کسر، می‌توان عامل $x - 1$ را از صورت و منخرج کسر حذف کرد و عبارت را از حالت مبهم $\frac{0}{0}$ خارج نمود. پس:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2ax^2 - x - 2a}{ax^2 + x(1 - a) - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x) + 2a(x + 1)(x - 1)}{ax(x - 1) + (x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2a(x + 1)}{a + 1} \\ &= \frac{1 + 1 + 2a(1 + 1)}{a + 1} = \frac{4a + 2}{a + 1} \Rightarrow \frac{4a + 2}{a + 1} = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

لذا گزینه ۲ جواب صحیح است.
لازم به یادآوری است که این مسئله با قاعده هسپیتال نیز قابل حل است.

برای $\frac{|x|}{x}$ وقتی $x \rightarrow 0^+$ می‌رود برابر 1 می‌باشد و حد آن وقتی $x \rightarrow 0^-$ می‌رود برابر -1 می‌باشد پس داریم (۲۸)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{|x|}{x} \right) &= x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{|x|}{x} \right) &= x - 1 = -1 \end{aligned}$$

پس گزینه ۴ درست است

باید حد چپ، حد راست و مقدار تابع در نقطه صفر یکسان باشند داریم: (۲۹)

$$\begin{aligned} \text{حد چپ: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x+1} = -1 \\ \text{حد راست: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x+1} = -1 \\ \text{مقدار تابع} &= f(0) = a \Rightarrow a = -1 \end{aligned}$$

پس گزینه ۲ صحیح است.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



۳۰ برای پیوسته بودن تابع باید حد تابع با مقدار تابع برابر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x + |x - 2|}{x - 1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + |x - 2|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + 2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x - 1)}{x - 1} = -2, \quad f(1) = a$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow a = -2$$

تذکر: چون $x \rightarrow 1$ پس x در حوالی ۱ است و $|x - 2| = 2 - x$ می‌باشد. بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۳۱ تابع $\sqrt{4 - x^2}$ در فاصله $|x| < 2$ پیوسته و $\frac{1}{2}x - 1$ نیز یک چندجمله‌ای است و پیوسته است پس باید نقاط مرزی را بررسی کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2} & -2 < x < 2 \\ \frac{1}{2}x - 1 & x > 2, x < -2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \sqrt{4 - (2)^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \frac{1}{2} \times 2 - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{در } x = 2 \text{ پیوسته است.}$$

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \sqrt{4 - (-2)^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \left(\frac{1}{2} \times -2 \right) - 1 = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{در } x = -2 \text{ منفصل است.}$$

پس تابع فقط یک نقطه ناپیوسته دارد. بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای این که $f(x)$ در $[0, 2]$ پیوسته باشد باید در نقاط داخلی $(0, 2)$ پیوسته و در $x = 0$ پیوستگی راست و در $x = 2$ پیوستگی چپ داشته باشد. پس:

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (0 - 1) \times 0 = 0 \Rightarrow \text{در } x = 0 \text{ پیوستگی راست دارد} \end{cases}$$

$$x = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (2 - 1)[2^-] = 1 \times 1 = 1 \Rightarrow \text{در } x = 2 \text{ پیوستگی چپ ندارد} \end{cases}$$

پس در نقطه $x = 2$ تابع ناپیوسته است.

برای این که $f(x)$ در $(0, 2)$ پیوسته باشد فقط کافیست در $x = 1$ که یک نقطه صحیح است پیوسته باشد:

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= (1 - 1)[1] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= (1 - 1)[1^+] = 0 \times 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= (1 - 1)[1^-] = 0 \times 0 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{در } x = 1 \text{ پیوسته است.}$$

بنابراین تنها نقطه انفصال نقطه $x = 2$ می باشد، پس فقط یک نقطه انفصال داریم لذا گزینه ۳ صحیح است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $f(x) = x - [x] + \sin\left(\frac{\pi[x]}{2}\right) \quad 3 \leq x \leq 6$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 3 + \sin \frac{3\pi}{2} = x - 4 & 3 \leq x < 4 \\ x - 4 + \sin \frac{4\pi}{2} = x - 4 & 4 \leq x < 5 \\ x - 5 + \sin \frac{5\pi}{2} = x - 4 & 5 \leq x < 6 \\ 0 + \sin \frac{6\pi}{2} = 0 & x = 6 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 4 & 3 \leq x < 6 \\ 0 & x = 6 \end{cases}$$

تابع فقط در $x = 6$ ناپیوسته است (پیوستگی چپ ندارد).



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



۳۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای پیوسته بودن $f(x)$ در $x = 0$ کافی است که حد تابع در $x = 0$ با مقدار تابع در این نقطه برابر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - |x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + x}{x} = 2 \end{cases}$$

چون تابع در این نقطه حد ندارد، پس به ازای هیچ مقدار a ، پیوسته نمی‌شود. بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۳۵ یادآوری: شرط پیوستگی برای تابع $f(x)$ این است که در آن نقطه $f(x)$ موجود باشد و حد آن نیز موجود و برابر مقدار تابع باشد پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= (3 + 3)[3^-] = 6 \times 2 = 12 \\ f(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3A + 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3A + 3 = 12 \Rightarrow A = 3$$

پس گزینه ۲ صحیح است.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۳۶)

شروط پیوستگی را برای سؤال مذکور می‌نویسیم. داریم:

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= (-2)(-1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= (-1)^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= (-2)(-1) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{تابع در } x = -1 \text{ پیوسته نیست}$$

حال با توجه به اینکه مقدار تابع با حد چپ در $x = 1$ برابر است پس:

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= -2(1) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -2(1) = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{تابع در } x = 1 \text{ پیوستگی چپ دارد}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (۳۷)

تابع $f(x) = -\sqrt{16-x^2}$ در فاصله $|x| \leq 4$ همواره پیوسته است و تابع $f(x) = x - 4$ نیز در فاصله $|x| > 4$ پیوسته است، پس فقط نقاط مرزی باید بررسی شوند، یعنی نقاط $x = \pm 4$. شرط پیوستگی در این نقاط (نقطه $x = a$) این است که اولاً $f(a)$ موجود باشد و ثانیاً $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود و برابر با $f(a)$ باشد. در نقاط مرزی حد چپ و راست باید برابر باشند. با توجه به ضابطه تابع:

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4) = 0 \Rightarrow \text{تابع در } x = 4 \text{ پیوسته است}$$

ولی

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = f(-4) = -\sqrt{16-16} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^-} (x - 4) = -8$$

که حد چپ و راست تابع در $x = -4$ برابر نیست، پس در این نقطه حد نداشته و ناپیوسته است.

$$\left. \begin{aligned} \text{حد } f(x) &= \text{حد } |x+3| = 0 \\ x \rightarrow -3^- & \quad x \rightarrow -3^+ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{در } x = -3 \text{ از چپ و راست پیوسته نمی باشد.}$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است. (۳۸)



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در این تست شرط پیوستگی در نقطه $x = 1$ بررسی می‌شود. پس باید داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

$$x \rightarrow 1^+ \quad x \rightarrow 1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = (1)^2 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = b(1) - 1$$

$$f(1) = 3$$

$$\Rightarrow 1 - a = b - 1 = 3 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شرط پیوستگی چپ آن است که شرط زیر برقرار باشد. پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2^2 + 1 = 5$$

$$x \rightarrow 2^-$$

$$x \rightarrow 2^-$$

با توجه به آن که $f(3) = 8$ می‌باشد داریم: $f(2) = f(3) - 3$ لذا گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = A$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$x \rightarrow 0^+$$

شرط پیوستگی $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ به صورت زیر می‌باشد:

پس با جایگزینی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x} = A \xrightarrow{\text{هویتال}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - 1}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 1}{2x - 2} = A \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$x \rightarrow 0^+$$

تابع مفروض بصورت زیر خلاصه می‌شود.

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & x > 0 \\ 3x - 2 & x < 0 \\ a - 3 & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{حد } f(x) = f(0)$$

$$x \rightarrow 0^-$$

شرط پیوستگی چپ در نقطه $x = 0$ چنین است:

$$\text{حد } 3x - 2 = a - 3 \Rightarrow 3(0) - 2 = a - 3 \Rightarrow a = 1$$

$$x \rightarrow 0^-$$

پس گزینه ۳ صحیح است.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید حد مقدار تابع را در نقاط ۱- و ۱ بررسی کنیم تا پیوستگی تابع مشخص شود.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} x = -1$$

طبق نتیجه به دست آمده:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

بنابراین، چون حدتابع در $x = 1$ با مقدار آن در $x = 1$ برابر نیست، پس $f(x)$ ناپيوسته است.

شرط لازم و کافی برای پیوستگی راست در نقطه‌ای بطول x آنست که حد راست تابع برابر مقدار تابع شود پس:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2$$

حال مقدار تابع را مقدار گذاری کرده پس حد حاصل می‌شود.

یعنی گزینه ۱ صحیح است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حد چپ، حد راست و مقدار تابع را به دست می‌آوریم. پس داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1^2 - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -(1) + 3 = 2 \\ f(2) = 2 \end{cases}$$

چون مقدار تابع با حد راست برابر است پس تابع پیوستگی راست دارد و گزینه ۴ صحیح است.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



تابع $y = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$ روی اعداد غیر منفی به جز یک پیوسته است. پس اگر $f(x)$ بخواهد پیوسته باشد کافی است در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد. پس:

$$\begin{cases} f(1) = a \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

شرط پیوستگی یک تابع این است که تابع در آن نقطه دارای حد باشد و مقدار آن برابر مقدار تابع در نقطه مورد نظر باشد به عبارت دیگر: $f(x) = f(0) = a$ حد $x \rightarrow 0$.

وقتی $x \rightarrow 0$ کسر بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل می شود. پس عبارت را به صورت گویا تبدیل می نماییم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}(\sqrt[3]{x+8} - 2) &= \frac{(\sqrt[3]{x+8} - 2)(\sqrt[3]{(x+8)^2} + 2\sqrt[3]{x+8} + 4)}{x(\sqrt[3]{(x+8)^2} + 2\sqrt[3]{x+8} + 4)} = \\ &= \frac{x+8-8}{x(\sqrt[3]{(x+8)^2} + 2\sqrt[3]{x+8} + 4)} = \frac{1}{(\sqrt[3]{(x+8)^2} + 2\sqrt[3]{x+8} + 4)} \end{aligned}$$

و وقتی $x \rightarrow 0$ ، کسر بسوی $\frac{1}{12}$ می رود. پس $a = \frac{1}{12}$ می باشد و گزینه ۱ صحیح است.

تذکر: مسئله فوق به کمک قاعده هوییتال نیز قابل حل است.

برای اینکه y در $x = 1$ متصل باشد باید $f(x) = f(1)$ حد $x \rightarrow 1$ باشد.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} y &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x - a = 1 - a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} y &= \lim_{x \rightarrow 1^+} ax + 2 = a + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 - a = a + 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۲ صحیح است.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



۴۹

برای پیوستگی تابع چند ضابطه‌ای باید اولاً هریک از ضوابط در ناحیه موردنظر تعریف شده باشند و ثانیاً کل تابع در نقاط مرزی پیوسته باشد. در این سوال چون هر یک از ضابطه‌ها پیوسته‌اند، پس کافی است که پیوستگی در مرزها را بررسی کنیم. پس:

$$\left. \begin{array}{l} \text{حد } (2x + ax) = 2 + 2a \\ x \rightarrow 2^+ \\ \text{حد } (ax^2 + 1) = 4a + 1 \\ x \rightarrow 2^- \\ f(2) = 4a + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 4a + 1 = 2 + 2a \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

بنابراین گزینه ۴ جواب صحیح است.

۵۰

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{x^2 + x^2 - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{(x^2 + 2)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm 1} x^2 + 2 = 3$$

چون باید حد چپ و راست و مقدار تابع برابر باشند پس گزینه ۳ درست است. یعنی $a = 3$.

۵۱

تابعی پیوسته است که از چپ و راست در آن نقطه پیوسته باشد. گزینه‌ها را تک تک بررسی می‌کنیم:
گزینه ۱: اگر تابعی از چپ پیوسته و از سمت راست پیوسته باشد، در آن نقطه پیوسته است. این گزینه درست است و شرط لازم و کافی برای پیوستگی، پیوستگی از چپ و راست است.

گزینه ۳: اگر تابعی از چپ حد و از سمت راست حد داشته باشد، در آن نقطه حد دارد. این گزینه لزوماً درست نیست چون معلوم نیست که حد چپ و راست باهم مساوی باشند. مثلاً تابع $f(x) = \begin{cases} x & x > 2 \\ x^2 & x < 2 \end{cases}$ را در نظر

$$\text{حد } f(x) = 2 \text{ , } \text{حد } f(x) = 2^2 = 4 \\ x \rightarrow 2^+ \quad x \rightarrow 2^-$$

می‌گیریم:

این تابع از چپ و راست حد دارد ولی در کل حد ندارد.

گزینه ۲ نیز هنگامی صحیح است که حد راست تابع با حد چپ آن (که چون پیوستگی چپ دارد، با مقدار تابع در x_0 برابر باشد) که چنین شرطی قید نشده است.

در گزینه ۴، یک تابع می‌تواند حد چپ و راست داشته باشد ولی اولاً می‌تواند این دو حد باهم برابر نباشد و ثانیاً تابع می‌تواند در x_0 تعریف شده نباشد. بنابراین وجود داشتن حد چپ و راست الزاماً به معنی پیوستگی تابع در x_0 نیست. با توجه به این توضیحات، گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} & |x| > 1 \\ ax + b & |x| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} & x > 1 ; x < -1 \\ ax + b & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

با توجه به اینکه ضابطه‌های $f(x)$ در فاصله‌های مربوط به خود پیوسته می‌باشند پس برای اینکه $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد کافی است $f(x)$ در $x = 1$, $x = -1$ پیوسته باشد.

$$x = 1 \quad \begin{cases} f(1) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1 + 2 - 1}{1} = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2 \quad (I)$$

$$x = -1 \quad \begin{cases} f(-1) = -a + b \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -a + b \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{(-1)^2 + 2(-1) - 1}{-1} = 2 \end{cases} \Rightarrow -a + b = 2 \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow (a, b) = (0, 1)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هر دو تابع درباره‌ی تعریفی پیوسته‌اند کافی است در نقاط شکست، تابع پیوسته باشد پس:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1)[x] = 1 \times 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} a + 2 \sin \frac{\pi}{x} = a + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۵۴)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۵۵)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x}} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - a + 4) = a - a + 4 = 4$$

$f(1) = 4$ پس f در $x = 1$ پیوسته است و چون نقطه‌ای انفصال دیگری ندارد f روی R پیوسته است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. روش اول: چون تابع $g(x) = 2 \sin x$ در $x = \frac{\pi}{4}$ دارای Max است بنابراین تابع $f(x) = [2 \sin x]$ در $x = \frac{\pi}{4}$ هیچ نوع پیوستگی ندارد. (۵۶)

روش دوم: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

هیچ نوع پیوستگی ندارد $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = [2(1^-)] = 1$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۵۷)

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{2}{2\sqrt{2x}}}{-1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باید f در $x=2$ پیوسته باشد. پس: (۵۸)

$$4 + 2a - 5 = 2a - 1 \Rightarrow -1 = -1 \Rightarrow a \in R$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۵۹)

حد چپ $= \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x - [x] = 6 - 1 = 5$ ، حد راست $= \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 2 = 4$

حدود چپ و راست در $x = 2$ برابر نیستند، بنابراین هرگز تابع در این نقطه پیوسته نبوده و مقداری برای a وجود ندارد.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0 \\ f(1) &= 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ در } x = 1 \text{ ناپیوسته است.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2 \\ f(-1) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ در } x = -1 \text{ پیوسته است.}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. وقتی $x \rightarrow 2^-$ آن گاه $x^2 - x - 2 < 0$ پس $|x^2 - x - 2| = -(x^2 - x - 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + x + 2}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 1}{2 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 12}}} = \frac{-3}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. روش اول: ۶۲

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(3x + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)}{2 - \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\cancel{\sqrt{x} - 2})(\sqrt{x} + 2)(3x + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)}{-(\cancel{\sqrt{x} - 2})} = \frac{(4)(14)(2)}{-1} = -112$$

روش دوم: استفاده از قانون هوییتال:

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{6x - 10}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{14}{-\frac{1}{4}} = \frac{14}{-\frac{1}{8}} = -112$$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶۳

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(x+8)}{6(2+\sqrt[3]{x})} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)((\sqrt[3]{x})^3 + 2^3)}{6(2+\sqrt[3]{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[3]{x}^2 - 2\sqrt[3]{x} + 2)}{6(2+\sqrt[3]{x})} = \frac{-6(12)}{6} = -12$$

روش دوم: هوییتال

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 10}{6\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)} = \frac{-6}{6\left(\frac{1}{12}\right)} = \frac{-6}{\frac{1}{2}} = -12$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۴

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt[3]{x} + 5}{2x - \sqrt[3]{3x+1}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 - \frac{3}{5}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{5}} = -\frac{15}{14}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۵

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = a \log_{\frac{1}{2}} = 2a \\ f(3) = a \log_{\frac{1}{2}} = 2a \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3a + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 3a + 1 = 2a \Rightarrow a = -1$$

$$x < 3: f(x) = ax + 2^{x-3} = -x + 2^{x-3}$$

$$f(2) = -2 + 2^{-1} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۶۶

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= a + \sin \frac{3\pi}{2} = a - 1 = 2 \Rightarrow a = 3 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) &= b \cos \pi = -b = 2 \Rightarrow b = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a - b = 5$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۶۷

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 1}{1} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2 - x + 2}{x - 1} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x - 1}{1} = -3 \end{aligned}$$

این تابع در $x=1$ حد ندارد، پس هیچ‌گاه پیوسته نمی‌شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید تابع در نقاط مرزی یعنی $x=1$ و $x=-1$ پیوسته باشد پس:

$$\begin{aligned} x=1 & \begin{cases} a+b=0 \\ -a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a+b=0 \\ x=-1 & \begin{cases} -a+b=-1 \\ (-1)^+ = -1(-1)=1 \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$x=3 \Rightarrow y = ax + b = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}(3) + \frac{1}{2} = -1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۶۹

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}} = 2 \\ f(0) &= a \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۷۰)

$$f(2) = 2 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a \left(1 + \sqrt[3]{1-x} \right)}{x^2 - 2x} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a \left(1 + \frac{-1}{\sqrt[3]{1-x}} \right)}{2x - 2} = \frac{-a}{2} = -\frac{a}{2}$$

$$2 - a = -\frac{a}{2} \Rightarrow 12 - 6a = -a \Rightarrow 5a = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{5} = 2.4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۷۱)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & x > 2 \\ ax-1 & x \leq 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 2a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - 1) = 2a - 1$$

کافی است f در $x = 2$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)} = \frac{3 \times 4}{3} = 4$$

$$2a - 1 = 4 \Rightarrow a = 2.5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (۷۲)

$$f(-2) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1+x^3}{-(x+2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x+2)(x^2-2x+2)}{-(x+2)} = -12 \Rightarrow a = -12$$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



$$|x - 1| = 1 \Rightarrow x - 1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

با توجه به شروط داده شده باید در نقاط $x = 2$, $x = 0$ پیوستگی‌ها بررسی شوند.

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & ; 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & ; x \leq 0 \text{ یا } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (2-1)[2^-] = 1 \end{cases} \Rightarrow 4 + 2a + b = 1 \Rightarrow 2a + b = -3$$

$$\begin{cases} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + 0 + b = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (0-1)[0^+] = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0$$

$$b = 0 \rightarrow 2a + 0 = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



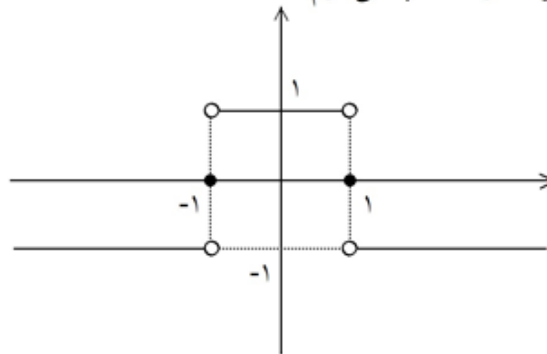
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید ضابطه تابع $(g \circ f)(x)$ را حساب کنیم. بنابراین ضابطه g به شرط $1 - x^2$ مثبت باشد برابر ۱ و اگر $1 - x^2$ منفی باشد، حاصل y برابر -1 و اگر $1 - x^2 = 0$ برابر صفر باشد، حاصل y برابر صفر است.

$$\begin{cases} 1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow g(f(x)) = 1 \\ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow g(f(x)) = 0 \\ 1 - x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \Rightarrow g(f(x)) = -1 \end{cases}$$

با توجه به حاصل $g(f(x))$ و حدود x ضابطه و $(g \circ f)(x)$ برابر است با:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & ; -1 < x < 1 \\ 0 & ; x = \pm 1 \\ -1 & ; x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

یا رسم نمودار تابع تعداد نقاط ناپیوسته را حساب می‌کنیم.



در شکل مشخص است که تابع در $x = -1$ و $x = 1$ ناپیوسته است.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس





دانش آموزان و همکاران عزیز برای دریافت تست های کنکور از سال ۱۳۶۳ تا ۱۴۰۱ به صورت مبحث به مبحث می توانید با شماره ۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴ تماس بگیرید .

منتظر نقطه نظرات و پیشنهادات شما می باشم



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس