



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

نام درس : ریاضی ۲

نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی : یازدهم تجربی

نام دبیر : سید علی موسوی

عنوان آزمون : فصل ۳ - تابع

۱

برد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1+x^2}{2x}$ کدام است؟

(۱) $[-1, 1]$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $R - (-1, 1)$ (۴) $R - [-1, 1]$

۲

اگر $f(x) = \frac{-2x^2 + 5x}{x-2}$ باشد، $f(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) $1 + \sqrt{2}$

۳

برد تابع $f(x) = \frac{|x|}{|x|+1}$ ، $(x \in R)$ کدام است؟

(۱) $(-\infty, 1)$ (۲) $(-\infty, 1]$ (۳) $[0, 1]$ (۴) $[0, 1)$

۴

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x+4}$ ، در بازه (a, b) پایین‌تر از خط به معادله $y=2$ است. بیشترین مقدار $b-a$

کدام است؟
(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ∞

۵

اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، ضابطه تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{1-x^2}$ (۲) $\frac{2x}{x^2-1}$ (۳) $\frac{2x+1}{1-x^2}$ (۴) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

۶

تابع با ضابطه $f(x) = |x-2|$ مساوی کدام یک از توابع است؟

(۱) $\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} \right|$ (۲) $\left| \frac{x^2 - 4}{x+2} \right|$
(۳) $\frac{(x-2)^2}{|x-2|}$ (۴) $\frac{|6x-12|}{6}$



۷ نمودار تابع $y = [x^2]$ ، روی بازه $x \in (-2, 2)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است.)

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۸ اگر $(1 + \sqrt{2})^6 + (1 - \sqrt{2})^6 = 198$ باشد، جزء صحیح عدد $(1 + \sqrt{2})^6$ کدام است؟

- ۱۹۵ (۱) ۱۹۶ (۲) ۱۹۷ (۳) ۱۹۸ (۴)

۹ برد تابع $f(x) = 2x - 2[x] + 1$ کدام است؟

- (۱) $[0, 2]$ (۲) $[1, 3]$ (۳) $[0, 2)$ (۴) $[0, 3]$

۱۰ برد تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - [x]}}$ کدام مجموعه است؟

- (۱) $(-\infty, 0]$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $[0, +\infty)$ (۴) $(1, +\infty)$

۱۱ مساحت نمودار رابطه $S = \{(x, y) \mid 0 < x < 2, 0 < y < x - [x]\}$ در صفحه برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۱۲ حاصل $||[7x] - [5x]||$ به ازای $x = \frac{-1}{4}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

۱۳ نمودار تابع $y = x - [x]$ ؛ $x \in [-2, 3)$ از n پاره خط مساوی به اندازه L تشکیل شده است. دوتایی مرتب (n, L) کدام است؟

- (۱) (۱ و ۴) (۲) $(4, \sqrt{2})$ (۳) $(5, 1)$ (۴) $(5, \sqrt{2})$

۱۴ برد تابع f با معادله $y = \sqrt{1 - x^2}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R}^+$ (۳) $[0, 1]$ (۴) $[-1, 1]$

۱۵ اگر $f(x) = \sqrt{x + |x + 2|}$ ، دامنه ی تابع $f(-x)$ کدام است؟

- (۱) $x \leq -1$ (۲) $x \geq -1$ (۳) $x \leq 1$ (۴) $x \geq 1$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



۱۶ اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ ، دامنه‌ی تابع $f(3 - x)$ ، کدام است؟
 (۱) $[0, 2]$ (۲) $[0, 3]$ (۳) $[1, 2]$ (۴) $[1, 3]$

۱۷ دامنه تابع $f = \left\{ (x, y) : y = \sqrt{\frac{1 - |x|}{1 + |x|}} \right\}$ کدام مجموعه است؟
 (۱) R (۲) $\{x : x < 1\}$ (۳) $\{x : x > 1\}$ (۴) $\{x : -1 < x < 1\}$

۱۸ برد تابع $y = \sqrt{x - |x|}$ کدام است؟
 (۱) $\emptyset$ (۲) $\{y | y \geq 0\}$ (۳) $\{y | y < 0\}$ (۴) $\{0\}$

۱۹ اگر $f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \sqrt{2x-1}$ باشد، دامنه‌ی تابع $f(x)$ کدام فاصله است؟
 (۱) $[-1, 0)$ (۲) $[0, 1)$ (۳) $[-1, 1)$ (۴) $[1, +\infty)$

۲۰ اگر جزء صحیح $(x^2 + x)$ برابر ۱- باشد، آنگاه $[x^{20}]$ کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۲۱ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 2[x]$ ، مقدار $f\left(-\frac{1}{2}\right) f(\sqrt{3})$ ، کدام است؟
 (۱) $1/75$ (۲) $2/25$ (۳) $2/5$ (۴) $2/75$

۲۲ برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل $\left[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}\right] - 2\left[\sqrt{n^2 - 2n}\right]$ کدام است؟ (ابعاد [] به مفهوم جزء صحیح است.)
 (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۳ اگر $x^2 + x < 0$ باشد، حاصل $[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$ کدام است؟
 (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۱

۲۴ اگر $f(x) = [x]$ ، مجموعه‌ی مقادیر $f(x - f(x))$ کدام است؟
 (۱) $\{0\}$ (۲) $\{1\}$ (۳) $\{0, 1\}$ (۴) $\{-1, 0, 1\}$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



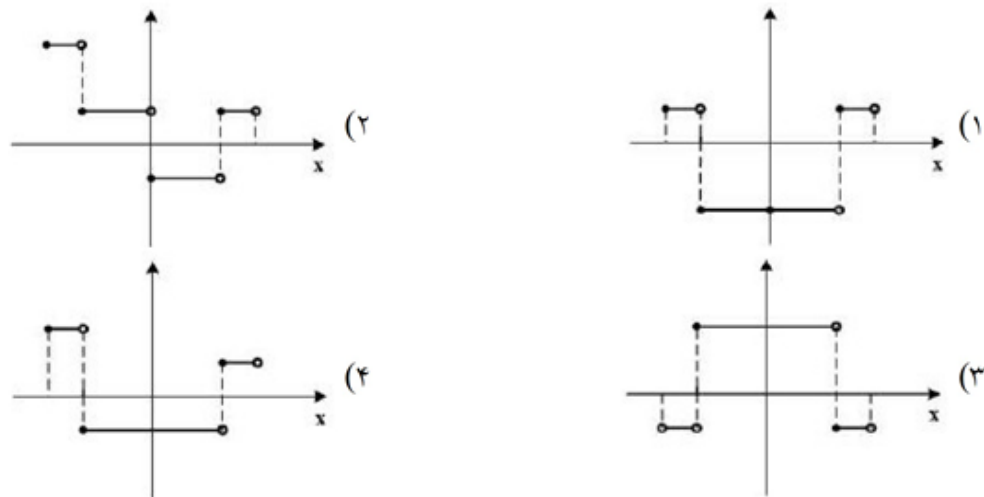
۲۵ اگر $[x - 2] = 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x - 3| - |x - 4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه مشترک هستند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) فاقد نقطه‌ی مشترک

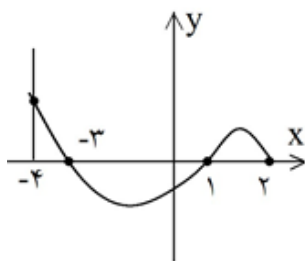
۲۶ ضابطه‌ی تابع $y = [-2x + |x|] + x$ در دامنه‌ی $-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3}$ ، کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $-2x$ (۲) $x + 1$ (۳) $x - 2$ (۴) $2x + \frac{1}{3}$

۲۷ نمودار تابع $y = 2||3x|| - 1$ به ازای $-\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{4}$ ، کدام است؟



۲۸ شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟



- (۱) $[0, 2]$
 (۲) $[-3, 2]$
 (۳) $[-4, -3] \cup [1, 2]$
 (۴) $[-3, 0] \cup [1, 2]$

۲۹ برد تابع $y = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ کدام است؟

- (۱) $[3\sqrt{2}, +\infty)$ (۲) $[\sqrt{3}, +\infty)$ (۳) $[2, +\infty)$ (۴) $[4, +\infty)$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



دامنه تعریف تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}} + \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام فاصله است؟ (۳۰)

- (۰, ۱] (۱) (۰, ۳) (۲) [۱, ۲] (۳) (۲, ۳) (۴)

دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{|x-1|} - 4$ کدام است؟ (۳۱)

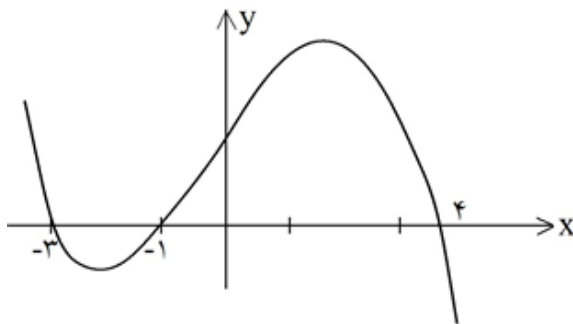
- $x < -4$ (۱) $-1 < x < 3$ (۲) $x > 1$ یا $x < 3$ (۳) $x > 5$ یا $x < -3$ (۴)

دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{4 - |x-1|}$ شامل چند عدد صحیح است؟ (۳۲)

- ۸ (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۵ (۴)

برد تابع $y = \sqrt{17 - x^2}$ شامل چند عدد صحیح است؟ (۳۳)

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴)

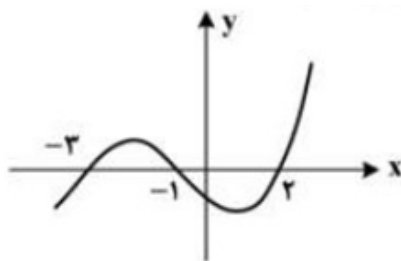


شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x-2)$ است. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ (۳۴)

- (۱) $[-1, 1] \cup [0, 6]$
(۲) $[-3, 1] \cup [0, 2]$
(۳) $[-5, -3] \cup [-1, 2]$
(۴) $[-5, -3] \cup [0, 2]$

به ازای کدام مجموعه مقادیر k ، بازه‌ی $(k-2, 3k+2)$ زیرمجموعه‌ای از دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$ است؟ (۳۵)

- (۱) $(\frac{1}{3}, 3]$ (۲) $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (۳) $[-1, \frac{1}{3})$ (۴) $[-1, -\frac{1}{3})$



شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)$ است. دامنه‌ی تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+1)f(x)}$ کدام است؟ (۳۶)

- (۱) $[-3, 2]$
(۲) $[-1, +\infty)$
(۳) $(-\infty, -1]$
(۴) $R - (-3, 2)$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



۳۷) نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محورها

y ها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

(۱) $4\sqrt{15}$ (۲) $6\sqrt{7}$ (۳) $4\sqrt{17}$ (۴) $6\sqrt{10}$

۳۸) قرینه‌ی نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست،

انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

(۱) $x = 1$ (۲) $x = 1/5$ (۳) $x = 2$ (۴) $x = 2/5$

۳۹) اگر $f = \{(1, 2), (-1, 3), (-1, m+1), (n+2, 2)\}$ یک تابع یک به یک باشد، $m+n$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

۴۰) اگر تابع $f = \{(-2, 2), (m, 3), (-1, 3), (2m, a)\}$ یک به یک باشد، a کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۴۱) اگر رابطه‌ی $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک به یک باشد، دوتایی (a, b) کدام است؟

(۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-1, 3)$ (۳) $(2, 1)$ (۴) $(2, 3)$

۴۲) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2x - |4 - 2x|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطه‌ی $f^{-1}(x)$ در آن بازه کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}x + 1, x \geq 4$ (۲) $\frac{1}{4}x - 1, x \leq 4$ (۳) $\frac{1}{4}x - 1, x \geq 4$ (۴) $\frac{1}{4}x + 1, x \leq 4$

۴۳) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x^3|$ با دامنه‌ی R ، چگونه است؟

(۱) نزولی (۲) صعودی (۳) وارون‌ناپذیر (۴) یک به یک

۴۴) تابع با کدام ضابطه زیر یک به یک است؟

(۱) $y = |x|$ (۲) $y = x^2$ (۳) $y = \begin{cases} x & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ (۴) $y = \begin{cases} -x & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$

۴۵) معکوس تابع $y = x^3 + \sqrt{x}$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

(۱) $(4, 66)$ (۲) $(3, 1)$ (۳) $(66, 4)$ (۴) $(1, 2)$

۴۶) نمودار تابع f بر نمودار معکوس آن منطبق است $f(x)$ برابر کدام است؟

(۱) x^3 (۲) x^2 (۳) $|x|$ (۴) $-x$



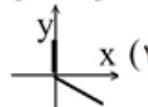
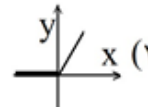
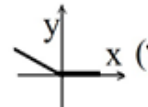
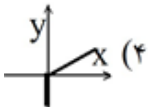
mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

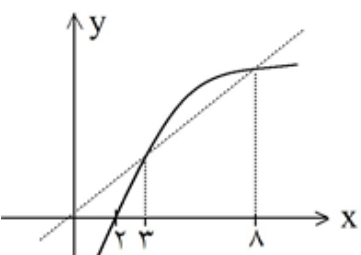


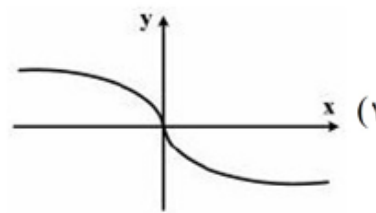
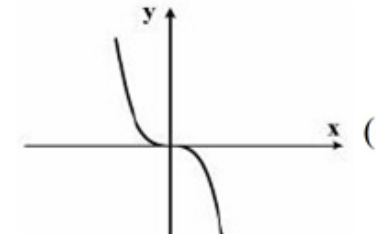
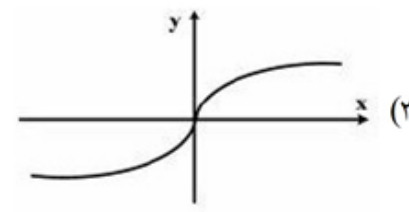
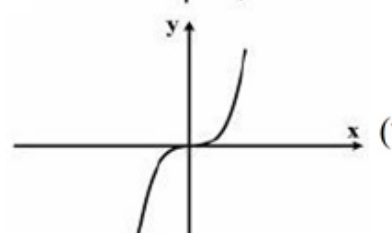
۴۷ اگر ضابطه تابع f ، $f(x) = x^3 + x + 1$ باشد، نمودار f^{-1} الزاماً از کدام نقطه می‌گذرد؟
 (۱) $(-1, 0)$ (۲) $(0, -1)$ (۳) $(1, 0)$ (۴) $(0, 1)$

۴۸ در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ ، مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟
 (۱) -8 (۲) -5 (۳) -2 (۴) تعریف نشده

۴۹ منحنی نمایش معکوس تابع $y = 2x + |2x|$ کدام است؟
 (۱)  (۲)  (۳)  (۴) 

۵۰ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیم‌ساز ناحیه‌ی اول و سوم است. دامنه‌ی تابع با ضابطه $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟
 (۱) $(0, 2]$ (۲) $[2, 3]$ (۳) $[2, 8]$ (۴) $[3, 8]$



۵۱ اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟
 (۱)  (۲) 
 (۳)  (۴) 

۵۲ وارون تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = 2x + 3$ کدام است؟
 (۱) $2x + 3$ (۲) $\frac{1}{2}x + 3$ (۳) $2x - 2$ (۴) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

۵۳ وارون تابع $f(x) = 2x + 14$ کدام است؟
 (۱) $g(x) = \frac{1}{2}x - 7$ (۲) $g(x) = \frac{1}{2}x + 7$ (۳) $g(x) = \frac{1}{2}x - 7$ (۴) $g(x) = \frac{1}{2}x + 7$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



۵۴ معادله‌ی قرینه $y = 2x + 2$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم کدام است؟

(۱) $2y = -x - 2$ (۲) $2y = -x + 2$ (۳) $2y = x - 2$ (۴) $2y = x + 2$

۵۵ نمودار تابع $y = |2x - 6| - |x + 4| + x$ در یک بازه، اکیداً نزولی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه کدام است؟

(۱) $-x + 6; x < -4$ (۲) $-x + 5; x > 2$ (۳) $-\frac{1}{2}x + 1; -4 < x < 10$ (۴) $-\frac{1}{2}x + 1; -4 < x < 10$

۵۶ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ ، در یک بازه، صعودی است. ضابطه‌ی معکوس آن، در این بازه، کدام است؟

(۱) $-x + 7; x > 8$ (۲) $\frac{1}{3}x + 2; x > 3$ (۳) $x + 7; x > -4$ (۴) $\frac{1}{3}x - 1; -4 < x < 8$

۵۷ اگر دو خط به معادلات $ax + by = 8$ و $2x - 3y = b$ ، نسبت به نیمساز ربع اول، متقارن باشند. $a + b$ کدام است؟

(۱) ± 3 (۲) ± 2 (۳) $2, -3$ (۴) $-2, 3$

۵۸ قرینه‌ی خط به معادله‌ی $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ ، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

(۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

۵۹ اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ و $g = \{(1, 5), (2, 6), (3, 0)\}$ آن‌گاه تابع $\frac{2f}{g}$ کدام است؟

(۱) $\emptyset$ (۲) $\left\{\left(1, \frac{4}{5}\right), (3, 1)\right\}$ (۳) $\left\{\left(1, \frac{4}{5}\right), \left(2, \frac{1}{2}\right)\right\}$ (۴) $\left\{(2, 1), \left(1, \frac{4}{5}\right)\right\}$

۶۰ فرض کنید $f = \{(x, x^2) | x = \pm 5, \pm 4, \dots, \pm 1, 0\}$ و

$g = \{(x, x^3) | x = \pm 5, \pm 4, \dots, \pm 1, 0\}$ دو تابع در صفحه‌ی مختصات باشند. تعداد عناصر برد تابع $y = \frac{g}{f}(x)$ کدام است؟

(۱) 11 (۲) 10 (۳) 6 (۴) 5

سید علی موسوی

۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴

مشهد مقدس

mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



۱) گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
راه حل اول:

$$y = \frac{1+x^2}{2x} \Rightarrow 2xy = 1+x^2 \Rightarrow x^2 - 2xy + 1 = 0$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 4y^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow y^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow (y-1)(y+1) \geq 0 \Rightarrow \begin{matrix} y \geq 1 \\ y \leq -1 \end{matrix} \Rightarrow R_f = R - (-1, 1)$$

راه حل دوم:

$$y = \frac{1+x^2}{2x} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \frac{1}{y} = \frac{2x}{1+x^2} \\ x = \tan \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \frac{1}{y} = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \sin 2\alpha \\ -1 \leq \sin 2\alpha \leq 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{y} \leq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ y \leq -1 \end{cases} \Rightarrow R_f = R - (-1, 1)$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲) گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 5x}{x-2} \Rightarrow f(1-\sqrt{2}) = \frac{-2(1-\sqrt{2})^2 + 5(1-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}-2}$$

$$\Rightarrow f(1-\sqrt{2}) = \frac{-2(1+2-2\sqrt{2}) + 5-5\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}-2} = \frac{-6+4\sqrt{2}+5-5\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}} = \frac{-1-\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}} = 1$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اولاً به ازاء هر x حقیقی داریم: $|x| \geq 0$ پس همواره تابع $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|} \geq 0$ می باشد.

ثانیاً در تابع $f(x)$ خواهیم داشت: $f(x) = \frac{|x|+1-1}{|x|+1} = 1 - \frac{1}{1+|x|}$ مقدار $f(x) < 1$ است زیرا $\frac{1}{1+|x|} > 0$ است. لذا $0 \leq f(x) < 1$ خواهد بود و در نتیجه برد تابع، فاصله $[0, 1)$ است. روش دوم:

$$y = \frac{|x|}{|x|+1} \Rightarrow y(|x|+1) = |x| \Rightarrow y|x| + y = |x| \Rightarrow y|x| - |x| = -y$$

$$\Rightarrow |x|(y-1) = -y \Rightarrow |x| = \frac{-y}{y-1} \Rightarrow |x| = \frac{y}{1-y}$$

$$|x| \geq 0 \Rightarrow \frac{y}{1-y} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq y < 1 \Rightarrow R_f = [0, 1)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می دانیم اگر نمودار تابع f بالاتر از نمودار تابع g باشد، در این صورت داریم

$$0 < f - g \leq g < f \quad \text{بنابراین برای این که نمودار تابع } f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} \text{ پایین خط } y=2 \text{ باشد، باید داشته باشیم:}$$

$$2 > \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} \Rightarrow 2 - \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} > 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 8 - 3x^2 + 2x}{x^2 + 4} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2 + 2x + 8}{x^2 + 4} > 0 \quad \xrightarrow{\text{مخرج همواره مثبت}} -x^2 + 2x + 8 > 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) < 0 \Rightarrow x \in (-2, 4) = (a, b) \Rightarrow a = -2, b = 4$$

بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ (بیشترین طول بازه) برابر است با $4 - (-2) = 6$.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f(x^2) - 2f(x) + 1 = \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + 1 = \frac{x^2 - 2x(x+1) + x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

$$\frac{x^2 - 2x^2 - 2x + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{-2x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2x+1}{1-x^2}$$

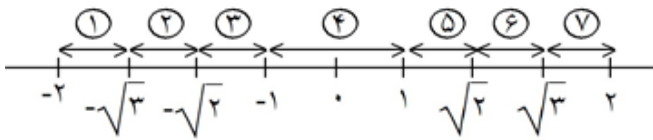
۶ دو تابع f و g برابرند اگر اولاً دامنه یکسان داشته باشند ثانیاً روی دامنه خود $f(x) = g(x)$ باشد طبق سوال دامنه تابع $f(x) = |x-2|$ مجموعه R است و با توجه به گزینه ها فقط گزینه ۴ دامنه R دارد پس:

$$\frac{|6x-12|}{6} = \frac{|x-2|}{6} = |x-2| = f(x)$$

و گزینه ۴ صحیح است.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۷



$$-2 < x < 2 \Rightarrow 0 < x^2 < 4 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < x^2 < 1 \Rightarrow \text{یک پاره خط} \\ 1 < x^2 < 2 \Rightarrow \text{دو پاره خط} \\ 2 < x^2 < 3 \Rightarrow \text{دو پاره خط} \\ 3 < x^2 < 4 \Rightarrow \text{دو پاره خط} \end{array} \right\} \text{پاره خط ۷}$$

یادآوری: تعریف جزء صحیح $n \leq x < n+1 \Leftrightarrow [x] = n, n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$ کوچکتر از یک است پس داریم:

$$\begin{cases} 0 < (1 - \sqrt{2})^6 < 1 \\ (1 - \sqrt{2})^6 + (1 + \sqrt{2})^6 = 198 \end{cases} \Rightarrow 197 < (1 + \sqrt{2})^6 < 198 \Rightarrow [(1 + \sqrt{2})^6] = 197$$

گزینه ۳ صحیح است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به تعریف جزء صحیح داریم:

$$[x] \leq x < [x] + 1 \Rightarrow 0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow 0 \leq 2x - 2[x] < 2 \Rightarrow 1 \leq 2x - 2[x] + 1 < 3 \Rightarrow 1 \leq f(x) < 3$$

و برد تابع فاصله نیم باز $[1, 3)$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۰

ابتدا دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-[x]}}$ را معلوم می‌کنیم تا برد آن، با تغییرات x بر روی دامنه، مشخص شود.

$$1 - [x] > 0 \Rightarrow [x] < 1 \Rightarrow x < 1$$

برای مقادیر $x < 0$ تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-[x]}}$ در ناحیه سوم به حالت صعودی تغییر می‌کند اگر $0 \leq x \leq 1$ باشد

آن‌گاه $[x] = 0$ در نتیجه نمودار تابع $f(x) = x$ در فاصله $[0, 1)$ واقع است. پس برد تابع مجموعه $(-\infty, 1)$ است و گزینه ۲ صحیح است.



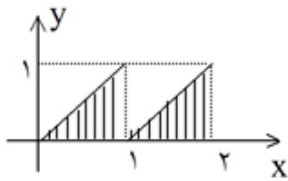
mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۱۱)

طبق تعریف تابع جزء صحیح می‌دانیم $n \in \mathbb{N}, n < x < n+1 \Leftrightarrow [x] = n$. پس:



$$\begin{cases} 0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \\ 1 < x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < x\} \\ S_2 = \{(x, y) \mid 1 < x < 2, 0 < y < x-1\} \end{cases}$$

بنابراین مساحت مورد نظر برابر با مجموع دو مساحت فوق می‌باشد.

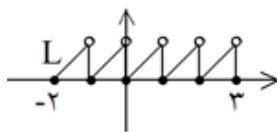
هر قطعه یک مثلث قائم‌الزاویه می‌باشد و مساحت‌های آن‌ها برابر با $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}$ می‌باشد. بنابراین مساحت کل

برابر با $S = S_1 + S_2 = 1$ می‌باشد و در نتیجه گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طبق تعریف تابع جزء صحیح، می‌دانیم $n < x < n+1 \Rightarrow [x] = n$ همچنین (۱۲)

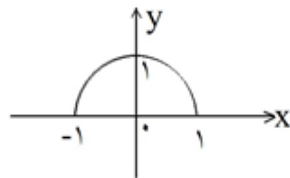
می‌دانیم $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$ بنابراین به ازاء $x = -\frac{1}{2}$ برای عبارت داده شده داریم:

$$\left| \left[\frac{-7}{2} \right] - \left[\frac{-5}{2} \right] \right| = \left| \left[-3\frac{1}{2} \right] - \left[-2\frac{1}{2} \right] \right| = \left| -4 - (-3) \right| = \left| -4 + 3 \right| = 1$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $(n, L) = (5, \sqrt{2})$ زوج مرتب $-2 < x < 3$ (۱۳)

$$\begin{aligned} 0 &\leq y < 1 \\ L &= \sqrt{2} \end{aligned}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم، طبق شکل معلوم است (۱۴)

که $y \geq 0$ و $-1 < x < 1$ تغییر می‌کند، پس برد تابع در فاصله $[0, 1]$ می‌باشد.

روش دوم:

$$y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2 = 1-y^2, x^2 \geq 0 \Rightarrow 1-y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$$

کاملاً مشخص است که y های منفی قابل قبول نمی‌باشد پس $0 \leq y \leq 1$ یعنی برد تابع برابر است با فاصله $[0, 1]$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۵)

$$f(x) = \sqrt{x+|x+2|} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x+|-x+2|} \Rightarrow -x+|-x+2| \geq 0$$

$$\Rightarrow x \leq |x-2| \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان ۲}} x^2 \leq x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x \leq 1$$



mydars
اپلیکیشن آموزشی مای درس



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۶

$$2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(2 - x) \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 2] \Rightarrow 0 \leq 3 - x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -x \leq -1 \Rightarrow x \in [1, 3]$$

شرط بامعنی بودن y آن است که زیر رادیکال مثبت باشد. پس: ۱۷

$$\frac{1 - |x|}{1 + |x|} > 0$$

چون همواره مخرج مثبت است و هیچ‌گاه صفر نمی‌شود، باید صورت کسر غیر منفی باشد. با توجه به تعریف قدر مطلق داریم:

$$1 - |x| > 0 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

پس گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

y تعریف نشده است $\Rightarrow x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow x - |x| = x - (-x) = 2x < 0 \Rightarrow$ ۱۸

$$(x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x - |x| = x - x) = 0 \Rightarrow y = 0$$

روابط فوق نشان می‌دهند که دامنه تابع، اعداد حقیقی نامنفی بوده و مقدار آن همواره برابر با صفر می‌باشد. لذا برد تابع مجموعه $\{0\}$ بوده و گزینه ۴ صحیح است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم: ۱۹

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-1}{x} = t &\Rightarrow x = \frac{1}{1-t} \\ f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \sqrt{2x-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(t) = \sqrt{2\left(\frac{1}{1-t}\right) - 1} \Rightarrow f(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \Rightarrow$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+x}{1-x} \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۰

$$-1 \leq x^2 + x < 0 \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^{20} < 1 \Rightarrow [x^{20}] = 0$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۱

$$f(x) = x^2 - 2[x] \Rightarrow f(\sqrt{3}) = 3 - 2[\sqrt{3}] = 3 - 2 = 1$$

$$-\frac{1}{2}f(\sqrt{3}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3})\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 2\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۲

$$\sqrt{n^2 - 2n} = \sqrt{(n-1)^2 - 1} \Rightarrow n-2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n-1 \Rightarrow \left[\sqrt{n^2 - 2n}\right] = n-2$$

$$\sqrt{4n^2 - 3n + 1} = \sqrt{(2n-1)^2 + n} \Rightarrow 2n-1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow \left[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}\right] = 2n-1$$

$$\left[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}\right] - 2\left[\sqrt{n^2 - 2n}\right] = (2n-1) - 2(n-2) = 3$$

راه حل دوم: چون این رابطه برای همه اعداد طبیعی $n \geq 3$ برقرار است پس:

$$n=3 \Rightarrow \text{عبارت} = \left[\sqrt{36 - 9 + 1}\right] - 2\left[\sqrt{3}\right] = 3$$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر $x^2 + x < 0$ باشد، نتیجه می‌گیریم که $-1 < x < 0$ است. حال برای تعیین حاصل

$$[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$$

داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \\ \text{به توان ۲ می‌رسانیم} \quad -1 < x < 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \\ \text{به توان ۳ می‌رسانیم} \quad -1 < x < 0 \Rightarrow x^3 < 0 \Rightarrow [x^3] = -1 \\ \text{به توان ۴ می‌رسانیم} \quad -1 < x < 0 \Rightarrow x^4 < 1 \Rightarrow [x^4] = 0 \end{array} \right. \Rightarrow [x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] = (-1) + 0 + (-1) + 0 = -2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $f(x) = [x]$ است. برای تعیین مقادیر تابع $f(x - f(x))$ یا همان $f(x - [x])$ کافی است به این نکته توجه کنیم که تابع داخلی، یعنی $x - [x]$ همواره در فاصله‌ی $[0, 1)$ تغییر می‌کند، پس داریم:

$$f(x) = [x] \Rightarrow f(x - f(x)) = f(x - [x]) = [x - [x]] = 0$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$[x - 2] = 1 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4 \Rightarrow f(x) = (x - 3) + (x - 4) = 2x - 7$$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow 2x^2 + x - 17 = 2x - 7 \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{غ ق} \\ x = \frac{5}{2} & \text{غ ق} \end{cases}$$

در فاصله‌ی $(3, 4)$ نمی‌باشند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. روش اول: در بازه‌ی داده شده، درون قدرمطلق منفی است. لذا: $|x| = -x$

$$y = [-2x + |x|] + x = [-2x - x] + x \Rightarrow y = [-3x] + x$$

از طرفی چون $-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3}$ ، بنابراین:

$$-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3} \xrightarrow{x-3} 1 < -3x < 2 \Rightarrow [-3x] = 1 \Rightarrow y = [-3x] + x = x + 1$$

روش دوم: از بازه‌ی داده شده عددی انتخاب می‌کنیم: مثلاً: $x = -\frac{1}{4}$. حال مقدار تابع y را به ازای این x محاسبه

$$y = \left[-2\left(-\frac{1}{4}\right) + \left|-\frac{1}{4}\right|\right] - \frac{1}{4} = \left[1 + \frac{1}{4}\right] - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

می‌کنیم:

تنها گزینه‌ای که اگر به جای x مقدار $-\frac{1}{4}$ قرار بدهیم، حاصل‌اش نیز $\frac{3}{4}$ می‌شود. گزینه‌ی ۲ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2[3x] - 1) = -1 \Rightarrow \text{گزینه ۳ نادرست است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (2[3x] - 1) = 1 \Rightarrow \text{گزینه‌های ۱ و ۴ نادرست هستند.}$$

بنابراین با حذف گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴، گزینه‌ی ۲ درست است.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



۲۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در بازه $[-۴, -۳]$ ، y مثبت و x منفی است که $xf(x)$ منفی می‌شود و قابل قبول نمی‌باشد. در بازه $[-۳, ۰]$ ، y منفی و x هم منفی است که $xf(x)$ مثبت می‌شود و قابل قبول است و در بازه $[۱, ۲]$ هم x و y مثبت هستند که قابل قبول است.

۲۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 1 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

با فرض $t = \sqrt{x^2 + 1}$ به تابع $g(t) = t + \frac{1}{t}$ می‌رسیم. واضح است که $t \in [1, +\infty)$ ، برد توابع f و g با هم برابر است.

$$g'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2} \geq 0$$

بنابراین g در دامنه‌ی تعریفش اکیداً صعودی است.

$$t \geq 1 \Rightarrow g(t) \geq g(1) \Rightarrow g(t) \geq 2$$

$$R_g = R_f = [2, +\infty)$$

بنابراین:



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



۳۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آنجا که رادیکال‌ها با فرجه زوج، زمانی معنی‌دار هستند که عدد زیر رادیکال غیرمنفی باشد پس داریم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}} + \sqrt{\frac{2-x}{x}}$$

$$\frac{x-1}{x-3} \geq 0: \quad \begin{array}{c|cc} x & 1 & 3 \\ \hline x-1 & - & + \\ x-3 & - & + \\ \hline \frac{x-1}{x-3} & + & - \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x \leq 1 \\ \text{یا} \\ x > 3 \end{array}$$

$$\frac{2-x}{x} \geq 0: \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline 2-x & + & - \\ x & - & + \\ \hline \frac{2-x}{x} & - & + \end{array} \Rightarrow 0 < x \leq 2$$

برای به دست آوردن دامنه تعریف تابع f ، اشتراک دامنه‌های دو عبارت لازم است. در نتیجه $x \in (0, 1]$ حاصل می‌شود.

۳۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$|x-1| - 4 \geq 0 \Rightarrow |x-1| \geq 4 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 4 \\ \text{یا} \\ x-1 \leq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ \text{یا} \\ x \leq -3 \end{cases}$$

۳۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج، زیر رادیکال باید نامنفی باشد، بنابراین:

$$y = \sqrt{4 - |x-1|} \Rightarrow 0 \leq 4 - |x-1| \Rightarrow |x-1| \leq 4 \Rightarrow (|u| \leq a \Rightarrow -a \leq u \leq a) \Rightarrow -4 \leq x-1 \leq 4 \Rightarrow -3 \leq x \leq 5$$

بنابراین دامنه‌ی تابع، بازه‌ی $[-3, 5]$ است که شامل ۹ عدد صحیح است $(\{-3, -2, \dots, 4, 5\})$.
تذکر: تعداد اعداد صحیح که در رابطه‌ی $a \leq x \leq b$ با شرط $a, b \in \mathbb{Z}$ صدق می‌کند، برابر است با $b - a + 1$.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



۳۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با به دست آوردن دامنه‌ی تابع داده شده، مسیر مناسبی برای تعیین برد آن گشوده می‌شود:

$$y = \sqrt{17 - x^2} \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} 17 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 17 \Rightarrow D_f = [-\sqrt{17}, \sqrt{17}]$$

حال با حرکت در جهت معکوس و در نتیجه‌ی اجرای فرآیند برگشت‌پذیر زیر، به حدود y می‌رسیم:

$$-\sqrt{17} \leq x \leq \sqrt{17} \xrightarrow{u^2 \leq a^2 \Leftrightarrow -a \leq u \leq a} x^2 \leq 17 \xrightarrow{x^2 \geq 0} 0 \leq x^2 \leq 17$$

$$\xrightarrow{\times (-1)} -17 \leq -x^2 \leq 0 \xrightarrow{+17} 0 \leq 17 - x^2 \leq 17$$

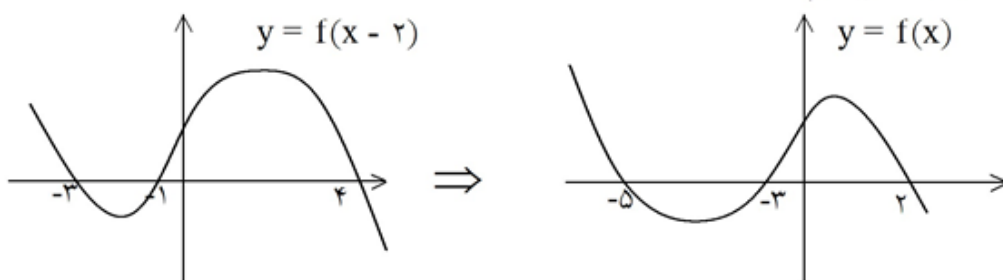
$$\xrightarrow{\text{با توجه به منفی بودن طرفین جذر می‌گیریم}} 0 \leq \sqrt{17 - x^2} \leq \sqrt{17}$$

$$\xrightarrow{\text{حدود } y} 0 \leq y \leq \sqrt{17} \Rightarrow R_f = [0, \sqrt{17}]$$

پس مجموعه‌ی اعضای صحیح برد تابع فوق $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ است و تعداد اعضای آن ۵ تا می‌باشد.

۳۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که نمودار $y = f(x - 2)$ داریم برای رسم $y = f(x)$ باید نمودار را دو واحد به طرف چپ منتقل کنیم.



$$\sqrt{xf(x)} \Rightarrow xf(x) \geq 0 \xrightarrow{\substack{\text{باید } x \text{ و } f(x) \\ \text{هم علامت باشند}}} \begin{cases} x \geq 0 \text{ و } f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 2] \\ x \leq 0 \text{ و } f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in [-5, -3] \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = [-5, -3] \cup [0, 2]$$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

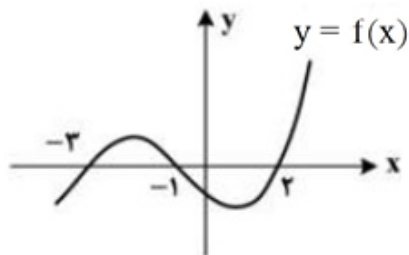


$$f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1} \Rightarrow \begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \\ x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases}$$

$$D_f = [-3, 1) \cup (1, 3]$$

$$(k-2, 3k+2) \subset D_f \Rightarrow \begin{cases} \text{اشتراک ندارد} \\ \begin{cases} k-2 \geq 1 \Rightarrow k \geq 3 \\ 3k+2 \leq 3 \Rightarrow k \leq \frac{1}{3} \end{cases} \\ \text{یا} \\ \begin{cases} 3k+2 \leq 1 \Rightarrow k \leq -\frac{1}{3} \\ k-2 \geq -3 \Rightarrow k \geq -1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow k \in \left[-1, -\frac{1}{3}\right]$$

بهترین گزینه، گزینه ی ۴ است.



$$\Rightarrow \sqrt{(x+1) \cdot f(x)} = g(x) \quad \text{دامنه تابع} = ?$$

x	-3	-1	2
x+1	-	-	+
f(x)	-	+	-
g(x)	+	-	+

$$g(x) \geq 0 \Rightarrow (-\infty, -3] \cup \{-1\} \cup [2, +\infty)$$

چون گفته تابع غیر نقطه ای است بنابراین ۱- از دامنه حذف می شود و در نتیجه دامنه به صورت زیر نوشته می شود.
 $(-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۳۷)

$12 \Rightarrow x \rightarrow x - 12$ واحد در جهت مثبت محور x ها

$2 \Rightarrow y \rightarrow y + 2$ واحد در جهت مثبت محور y ها

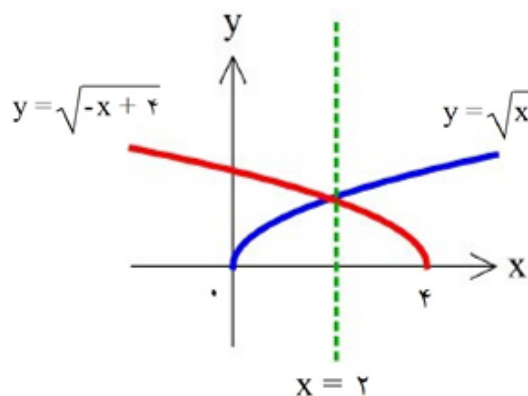
$$\sqrt{x-12} + 2 = \sqrt{x} \Rightarrow \underbrace{x-12 \geq 0}_{\text{دامنه جواب}} \Rightarrow x \geq 12$$

$$\sqrt{x-12} = \sqrt{x} - 2 \Rightarrow x - 12 = x - 4\sqrt{x} + 4 \Rightarrow 4\sqrt{x} = 16 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$$

$$x = 16 \Rightarrow y = 4$$

$$A(16, 4), B(0, 0) \Rightarrow AB = \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{2^8 + 2^4} = \sqrt{2^4(2^4 + 1)} = 4\sqrt{17}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا باید به جای x ، $x - 4$ قرار دهیم (۴ واحد به طرف راست) و سپس حاصل را قرینه کنیم (قرینه نسبت به محور y ها). دو نمودار $y = \sqrt{x}$ و $y = \sqrt{-(x-4)}$ را رسم می‌کنیم. (۳۸)



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در یک تابع یک به یک اگر y ها یکسان باشند، x ها نیز یکسان است و در یک تابع اگر x ها یکسان باشند، y ها نیز یکسان است. (۳۹)

$$\Rightarrow \begin{cases} m+1=3 \Rightarrow m=2 \\ n+2=1 \Rightarrow n=-1 \end{cases} \Rightarrow m+n=1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در تابع یک به یک داریم: (۴۰)

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f: y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$(m, 3), (-1, 3) \in f \Rightarrow m = -1 \Rightarrow (2m, a) = (-2, a) \in f \quad \left. \begin{matrix} (-2, 2) \in f \end{matrix} \right\} \Rightarrow a = 2$$



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۴۱)

الف) شرط تابع بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی اول برابر نداشته باشند.

$$(3, 2) = (3, a^2 - a) \Rightarrow a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

ب) شرط یک‌به‌یک بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی دوم برابر نداشته باشند. اما از میان دو مقدار به دست آمده برای a ، باید یکی را به گونه‌ای انتخاب کنیم که شرایط الف و ب کماکان برقرار بماند. در نتیجه فقط $a = 2$ قابل قبول می‌باشد. زیرا اگر $a = -1$ باشد، دو زوج مرتب $(-1, 4)$ و $(-1, 5)$ در مجموعه دیده می‌شوند که در آن صورت مجموعه‌ی حاصل تابع نخواهد بود. در نتیجه $(a, b) = (2, 3)$ می‌باشد.

$$f(x) = 2x - |4 - 2x| = \begin{cases} 2x + 4 - 2x & x > 2 \\ 2x - 4 + 2x & x < 2 \end{cases} \quad \text{گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۴۲)}$$

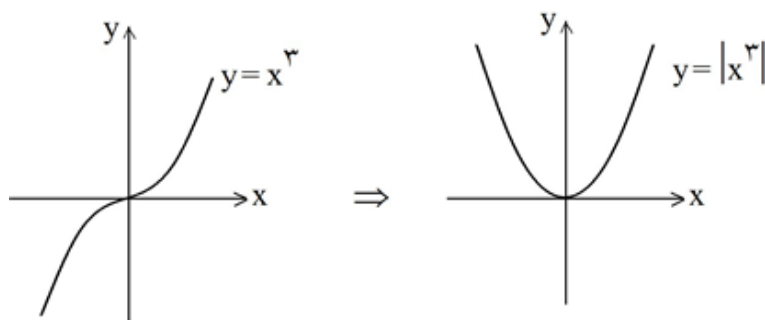
$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4 & x > 2 \\ 4x - 4 & x < 2 \end{cases}$$

به ازای $x < 2$ تابع یک به یک و وارون‌پذیر است.

$$x < 2 \Rightarrow 4x - 4 < 4 \Rightarrow y < 4$$

$$y = 4x - 4 \Rightarrow x = \frac{y + 4}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1 \quad (x < 4)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۴۳)



گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ یک‌به‌یک نیستند زیرا به ازای $x_1 = 1$ و $x_2 = -1$ مقادیر $y = 1$ بدست می‌آید. اما گزینه ۴ یک به یک می‌باشد و طبق شکل دو خط موازی محور x ها منحنی تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند پس گزینه ۴ درست است. (۴۴)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر f یک تابع معکوس‌پذیر باشد و نقطه‌ی (α, β) روی تابع f باشد، یعنی داشته باشیم $f(\alpha) = \beta$ ، آن گاه $f^{-1}(\beta) = \alpha$ بوده و نقطه‌ی (β, α) بر روی تابع معکوس f قرار دارد. بنابراین با توجه به گزینه‌ها داریم: (۴۵)

$$f(x) = x^3 + \sqrt{x} \Rightarrow f(4) = 4^3 + \sqrt{4} = 64 + 2 = 66 \Rightarrow f^{-1}(66) = 4 \Rightarrow (66, 4) \in f^{-1}$$

گزینه ۱) یعنی نقطه‌ی $(4, 66)$ بر روی خود تابع f قرار دارد، گزینه ۲) یعنی $(66, 4)$ بر روی معکوس تابع f قرار دارد. به همین ترتیب نقطه‌ی $(1, 2)$ روی تابع f و نقطه‌ی $(2, 1)$ روی تابع f^{-1} می‌باشد.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس



۴۶ برای اینکه نمودار تابع معکوس بر نمودار تابع منطبق باشد، اگر x را به y تبدیل کنیم، نباید نمودار تغییر کند و این خاصیت در گزینه ۴ وجود دارد زیرا:

$$y = -x \Rightarrow x = -y$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۴۷ اگر زوج مرتب (a, b) متعلق به f باشد حتماً زوج مرتب (b, a) متعلق به معکوس f است یعنی:

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

با توجه به گزینه‌های داده شده و ضابطه تابع f داریم $f(0) = 1$ ، چون $(0, 1) \in f$ است پس $(1, 0) \in f^{-1}$ می‌باشد با توجه به مطالب فوق گزینه ۳ صحیح است.

۴۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

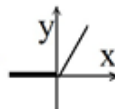
$$A \left| \begin{array}{l} a \\ 4 \end{array} \right. \in f \Rightarrow 4 = -x + \sqrt{-2x} \Rightarrow \sqrt{-2x} = x + 4 \xrightarrow{\text{توان ۲}} -2x = x^2 + 8x + 16$$

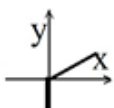
$$x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{قابل قبول} \\ x = -8 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

نکته: این تست به کمک گزینه‌ها به سادگی حل می‌شود.

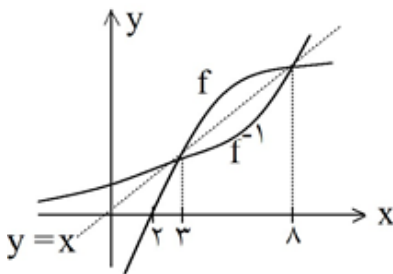
۴۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به تعریف قدرمطلق مسئله را ساده می‌کنیم:

$$y = \begin{cases} 2x + 2x & x \geq 0 \\ 2x - 2x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

منحنی نمایش تابع فوق بصورت  می‌باشد. چون معکوس یک تابع، تقارن یافته آن نسبت به نیمساز ربع

اول و سوم یعنی $(y = x)$ است. پس معکوس منحنی نمایش تابع بصورت  می‌باشد. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۵۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$x - f^{-1}(x) > 0 \Rightarrow x > f^{-1}(x)$$

$$\xrightarrow{\text{اکیدا صعودی } f} f(x) > f(f^{-1}(x))$$

$$\Rightarrow f(x) > x \Rightarrow x \in [3, 8]$$



mydars

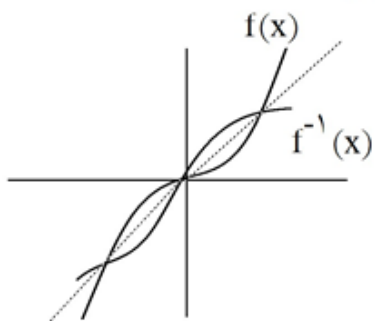
اپلیکیشن آموزشی مای درس





گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵۱

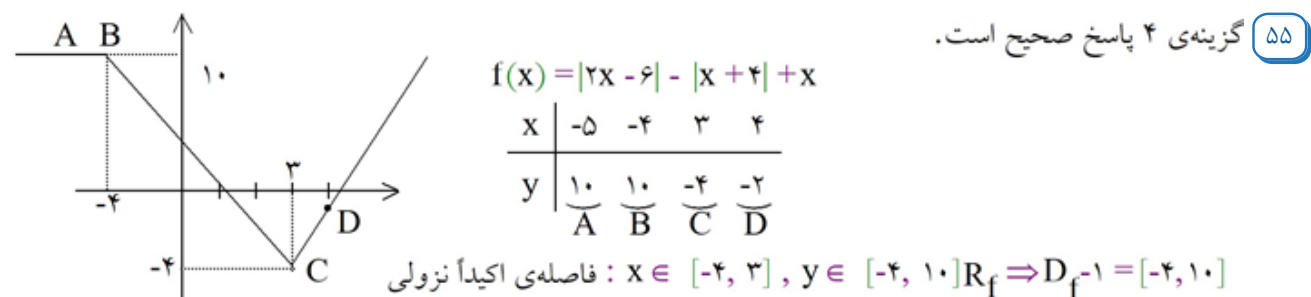
$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x(x) = x^2 & x \geq 0 \\ x(-x) = -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



۵۲ این تابع یک به یک است پس دارای وارون است و برای یافتن وارون آن باید جای x و y را عوض کنیم و سپس y را برحسب x بیابیم: $(y = 2x + 3 \Rightarrow x = 2y + 3 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2})$ که $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ ضابطه تابع وارون است. و گزینه ۴ جواب صحیح است.

۵۳ برای یافتن وارون تابع $y = f(x)$ ابتدا x را برحسب y محاسبه نموده و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.
 $y = 2x + 14 \Rightarrow x = \frac{y - 14}{2} \Rightarrow y = \frac{x}{2} - 7$
 بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۵۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای یافتن معادله خط نسبت به $y = x$ کافیست جای x و y را عوض کنیم پس داریم:
 $x = 2y + 2 \Rightarrow 2y = x - 2$



برای رسیدن به ضابطه معادله‌ی خطی که از B' و C' نقطه‌ی متناظر B و C می‌گذرد را می‌نویسیم:
 $B'(10, -4) \Rightarrow m = \frac{y}{x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 4)$
 $C'(-4, 3)$
 $y = -\frac{1}{2}x + 1 = f^{-1}(x)$

تذکر: با گزینه‌ها هم این تست به راحتی حل می‌شود.



۵۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = |2x - 6| - |x + 1| = \begin{cases} (2x - 6) - (x + 1) & x \geq 3 \\ -2x + 6 - (x + 1) & -1 \leq x < 3 \\ -2x + 6 - (-x - 1) & x < -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 7 & x \geq 3 \\ -3x + 5 & -1 \leq x < 3 \\ -x + 7 & x < -1 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ها مشخص است که ضابطه‌ی $y = x - 7$ برای $x \geq 3$ صعودی است.

$$x \geq 3 \xrightarrow{-7} x - 7 \geq -4 \Rightarrow y \geq -4$$

$$y = x - 7 \Rightarrow y + 7 = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = x + 7$$

نکته: در تابع معکوس جای دامنه و برد عوض می‌شود. بنابراین $y \geq -4$ برای تابع معکوس محدوده‌ی دامنه می‌شود.

۵۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای به دست آوردن قرینه‌ی هر نقطه یا منحنی نسبت به نیم‌ساز ربع اول، کافی است

$$ax + by = 8 \xrightarrow{y=x \text{ به نسبت}} bx + ay = 8$$

جای x و y را باهم عوض کنیم.این خط باید بر خط $2x - 3y = b$ منطبق باشد، پس:

$$\frac{b}{2} = \frac{a}{-3} = \frac{8}{b} \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow a + b = -2 \\ b = -4 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a + b = 2 \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای یافتن قرینه‌ی هر منحنی نسبت به خط $y = x$ کافی است جای متغیرهای x و y

عوض شود. زیرا قرینه نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم همان تابع وارون است. پس:

$$3x - 2y = 4 \Rightarrow 3x - 4 = 2y \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 2 \Rightarrow -2 = \text{عرض از مبدا}$$

۵۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$D_{\frac{2f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \{1, 2, 3\} - \{3\} = \{1, 2\}$$

$$\left(\frac{2f}{g}\right)(1) = \frac{2f(1)}{g(1)} = \frac{2(2)}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{2f}{g} = \left\{\left(1, \frac{4}{5}\right), (2, 1)\right\}$$

$$\left(\frac{2f}{g}\right)(2) = \frac{2f(2)}{g(2)} = \frac{2(3)}{6} = 1$$

۶۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^3}{x^2} = x, x \neq 0 \Rightarrow y = \{\pm 5, \pm 4, \dots, \pm 1\} \Rightarrow 10 \text{ تا}$$

سید علی موسوی

۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴

مشهد مقدس



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

