



علی هاشمی

نام آزمون: روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- حاصل عبارت $A = \tan 2^\circ + \tan 4^\circ + \tan 6^\circ + \dots + \tan 18^\circ$ کدام است؟۲- کدام تساوی نادرست است؟۳- به ازای کدام مقدار x تساوی $\cos(2x - \frac{\pi}{8}) = -\sin(x - \frac{\pi}{4})$ برقرار است؟۴- مقدار عبارت $A = \sin \frac{5\pi}{6} \tan \frac{5\pi}{4}$ برابر کدام است؟۵- حاصل عبارت $A = \sin\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha)$ کدام است؟



۶- اگر انتهای زاویه α در ربع اول دایره مثلثاتی و $2 = \frac{\sin(\alpha + \frac{3\pi}{2}) + 2\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 3\cos(2\pi + \alpha)}$ باشد، مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

۷- نقطه $P(x, y)$ روی دایره مثلثاتی را نسبت به مبدأ قرینه می کنیم تا نقطه P' به دست آید. در این صورت کدام نسبت مثلثاتی مربوط به نقاط P و P' باهم برابر است؟ ($x, y \neq 0$)

۸- کدام x در معادله $\tan\left(\frac{2\pi}{9} + x\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{18}\right)$ صدق می کند؟

۹- اگر $0 = \log(\sin \frac{4\pi}{5}) - \log(\cos 324^\circ) + \log A$ باشد، A کدام می تواند باشد؟

۱۰- اگر $-\frac{\sqrt{3k}}{4} = \frac{\sin \frac{3\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{6}}{\left| 2 \tan \frac{3\pi}{4} - \sqrt{3} \cot(-\frac{\pi}{3}) \right|}$ باشد، حاصل $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3k}\right)$ کدام است؟



۱۱- اگر $\tan x = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{4 \cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$ کدام است؟

۱۲- اگر زاویه θ در موقعیت استاندارد باشد، به طوری که نقطه‌ی انتهایی کمان θ دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3})$ قطع کند، مقدار

$$A = \frac{1 + \cot^2 \theta}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta)}$$

کدام است؟

۱۳- حاصل عبارت $\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$ کدام است؟

۱۴- اگر زاویه‌ی α به گونه‌ای باشد که $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 < 1$ ، آنگاه چه تعداد از نسبت‌های مثلثاتی $\sin \alpha$ ، $\cos \alpha$ ، $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ مثبت هستند؟

۱۵- حاصل عبارت $A = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + (\sqrt{2} \sin \alpha \cos \alpha)^2$ همواره کدام است؟



۱۶- اگر α زاویه‌ای در دایرهٔ مثلثاتی، $\cot \alpha = \sqrt{\frac{m}{n}} - 1$ و $\cos \alpha = \sqrt{1 - m^2}$ باشد، رابطهٔ بین m و n کدام است؟ (عبارت‌ها تعریف شده‌اند).

۱۷- حاصل عبارت $B = \frac{3 \sin 155^\circ}{5 \sin 335^\circ + \sin 385^\circ}$ کدام است؟

۱۸- اگر $m = 3 \cot \theta$ و θ زاویه‌ای در ناحیه‌ی سوم مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $A = \sqrt{m^2 + 9}$ کدام است؟

۱۹- حاصل عبارت $A = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ کدام است؟

۲۰- اگر انتهای کمان متناظر با زاویه‌ی x در ناحیه‌ی سوم باشد، حاصل $A = \sqrt{\frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x}} \times \sin x$ کدام است؟



۲۱- اگر $5 = 3 \sin \alpha + 2 \cos \beta$ ، آنگاه $\sin^2 \beta + \cos^2 \alpha$ کدام است؟

۲۲- حاصل عبارت زیر همواره برابر با کدام گزینه است؟

$$1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha = ?$$

$$A = (1 + \sin \theta) \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right) (1 - \sin \theta)^2$$

۲۳- حاصل عبارت A کدام است؟ $(\cos \theta \neq 0)$

$$A = \frac{2 \sin 25^\circ + 3 \sin 34^\circ}{\cos 20^\circ - 4 \cos 43^\circ}$$

۲۴- اگر $\tan 20^\circ = 0.4$ ، حاصل عبارت A کدام است؟



$$A = \frac{3 \sin 185^\circ - 4 \cos 175^\circ}{5 \sin 275^\circ + \cos 635^\circ}$$

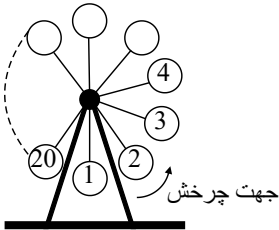
۲۵- اگر $\cot 5^\circ = a$ ، حاصل عبارت A کدام است؟

$$A = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{3\pi}{9} + \cos \frac{10\pi}{9} + \cos \frac{11\pi}{9}$$

۲۶- حاصل عبارت A کدام است؟



۲۷- چرخ و فلکی مطابق شکل، ۲۰ کابین با فاصله‌های یکسان دارد که از شماره‌های ۱ تا ۲۰ شماره‌گذاری شده‌اند. اگر چرخ و فلک $\frac{21\pi}{5}$ بچرخد، کابین شماره ۲ به محل کدام کابین منتقل می‌شود؟



۲۸- اگر $\tan 7^\circ = m$ ، حاصل عبارت $A = \frac{3 \sin(187^\circ) + 4 \cos(727^\circ)}{2 \sin(97^\circ) + 3 \cos(173^\circ)}$ بر حسب m کدام است؟

۲۹- اگر $\tan \alpha = 2$ باشد، حاصل $\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha) + \sin(3\pi - \alpha)}$ کدام است؟

۳۰- اگر $\cot 20^\circ = \frac{8}{3}$ باشد، حاصل $\frac{2 \sin 250^\circ - \cos 160^\circ}{\sin 160^\circ + 3 \cos 70^\circ - \sin 110^\circ}$ برابر کدام است؟



۳۱- اگر $\tan 25^\circ = 0.48$ باشد حاصل عبارت $\frac{\sin 155^\circ - 3 \cos 245^\circ}{\cos 295^\circ - 2 \sin 65^\circ}$ کدام است؟

۳۲- با فرض $\tan 22^\circ = \frac{2}{5}$ ، حاصل عبارت $\frac{\sin(-112^\circ) + \sin 158^\circ}{\cos(202^\circ)}$ ، کدام است؟

۳۳- اگر $\tan \theta = 0.2$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ کدام است؟

۳۴- هرگاه $\tan 15^\circ = a$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\cos 255^\circ - \cos 165^\circ}{2 \sin 75^\circ + 3 \cos 105^\circ}$ کدام است؟

۳۵- اگر $\cot \alpha = \frac{4}{3}$ و $-\frac{9\pi}{2} < \alpha < -5\pi$ باشد، حاصل $A = \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + \cos(\frac{7\pi}{2} + \alpha) + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ کدام است؟



۳۶- در تساوی $\sin(x + \frac{3\pi}{8}) = \cos(\frac{\pi}{4} - 3x)$ ، دو جواب برای x در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ به دست می آید. مجموع این دو جواب کدام است؟

۳۷- مقدار عبارت $\sqrt{2} \sin 15^\circ + \frac{\tan 4^\circ}{\cot 6^\circ} + \frac{\sin 3^\circ}{\cos 7^\circ}$ به ازای $\alpha = \frac{\pi}{20}$ کدام است؟

۳۸- حاصل عبارت $A = 2 \sin^2(22.5^\circ) + 4 \sin^2(30^\circ) - \frac{\cos(57^\circ)}{\cos(39^\circ)} - \tan(13.5^\circ)$ کدام است؟

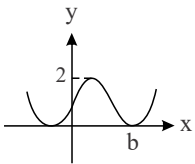
۳۹- اگر x و y دو زاویه حاده باشند و $x + y = \frac{\pi}{4}$ ، حاصل عبارت $A = \tan(5x + 4y) \times \tan(3x + 2y)$ کدام است؟

۴۰- حاصل عبارت $\sin(200^\circ) + 2 \sin(-340^\circ) + \cos(-110^\circ) - 3 \cos(250^\circ) - 3 \sin 20^\circ$ کدام است؟

۴۱- اگر $\tan 15^\circ = a$ باشد، حاصل $\frac{3 \cos 165^\circ - 2 \sin 285^\circ}{3 \sin 345^\circ - 4 \cos 255^\circ}$ کدام است؟



۴۲- حاصل $\tan 3^\circ \times \tan 17^\circ \times \tan 53^\circ \times \tan 87^\circ \times \tan 73^\circ \times \tan 37^\circ$ کدام است؟



۴۳- اگر بخشی از نمودار تابع $f(x) = a - \sin(x + \frac{3\pi}{4})$ به صورت زیر باشد، $a \cdot b$ کدام است؟

۴۴- حاصل عبارت $\cos^3 \frac{\pi}{5} + \cos^3 \frac{5\pi}{15} + \cos^3 \frac{7\pi}{15} + \cos^3 \frac{8\pi}{15} + \cos^3 \frac{12\pi}{15}$ کدام است؟



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ می‌دانیم که $\tan 180^\circ = 0$ است.

$$A = \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 60^\circ + \tan 80^\circ + \tan 100^\circ + \tan 120^\circ + \tan 140^\circ + \tan 160^\circ + \cancel{\tan 180^\circ}$$

$$\rightarrow A = \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 60^\circ + \tan 80^\circ + \tan(180^\circ - 80^\circ) + \tan(180^\circ - 60^\circ)$$

$$+ \tan(180^\circ - 40^\circ) + \tan(180^\circ - 20^\circ)$$

$$\rightarrow A = \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 60^\circ + \tan 80^\circ - \tan 80^\circ - \tan 60^\circ - \tan 40^\circ - \tan 20^\circ = 0$$

۲ - گزینه ۴

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

گزینه ۴، به صورت مقابل درست است.

سایر گزینه‌ها درست هستند.

۳ - گزینه ۳

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\rightarrow \left(2x - \frac{\pi}{8}\right) + \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\pi}{2} \rightarrow x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{8}$$

۴ - گزینه ۲

$$A = \sin \frac{5\pi}{6} \tan \frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

۵ - گزینه ۲

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\rightarrow A = \cos \alpha + (-\sin \alpha) - \cos \alpha + \sin \alpha = 0$$

۶ - گزینه ۳

$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + 2\sin(\pi - \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 3\cos(2\pi + \alpha)} = \frac{-\cos \alpha + 2\sin \alpha}{-\sin \alpha + 3\cos \alpha} = 2$$

$$\rightarrow -2\sin \alpha + 6\cos \alpha = -\cos \alpha + 2\sin \alpha \rightarrow -4\sin \alpha = -7\cos \alpha \rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{7}{4} \rightarrow \tan \alpha = \frac{7}{4}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + \frac{49}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\rightarrow \frac{65}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{65} \xrightarrow{\text{ربع اول}} \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

۷ - گزینه ۳ اگر نقطه $P(x, y)$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کنیم نقطه $P'(-x, -y)$ به دست می‌آید که در دایره مثلثاتی نقطه P' نسبت به نقطه P به اندازه π رادیان اختلاف دارد و داریم:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

۸ - گزینه ۳

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$



$$\tan \alpha = \cot \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \rightarrow \frac{2\pi}{9} + x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{18} \right)$$

$$\rightarrow x + x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18} - \frac{2\pi}{9} \rightarrow 2x = \frac{9\pi - \pi - 4\pi}{18} \rightarrow 2x = \frac{4\pi}{18} \rightarrow x = \frac{2\pi}{18} \rightarrow x = \frac{\pi}{9}$$

۹ - گزینه ۲

$$\sin \frac{4\pi}{5} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{5} \right) = \sin \frac{\pi}{5} = \sin 36^\circ$$

$$\cos 324^\circ = \cos (360^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ$$

$$\rightarrow \log(\sin 36^\circ) - \log(\cos 36^\circ) + \log A = 0 \rightarrow \log \left(\frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} \right) + \log A = 0$$

$$\rightarrow \log A = -\log(\tan 36^\circ) \rightarrow \log A = \log(\tan 36^\circ)^{-1}$$

$$\rightarrow \log A = \log(\cot 36^\circ) \rightarrow \log A = \log(\tan(90^\circ - 36^\circ)) \rightarrow \log A = \log(\tan 54^\circ) \rightarrow A = \tan 54^\circ$$

۱۰ - گزینه ۲

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{3\pi}{4} = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1, \quad \cot \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -\cot \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\left| 2(-1) - \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right|} = -\frac{\sqrt{3k}}{4} \rightarrow \frac{-\frac{\sqrt{6}}{4}}{|-2+1|} = -\frac{\sqrt{3k}}{4}$$

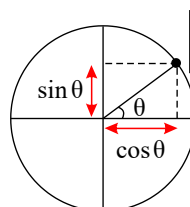
$$\rightarrow -\frac{\sqrt{6}}{4} = -\frac{\sqrt{3k}}{4} \rightarrow 6 = 3k \rightarrow \boxed{k=2}$$

$$\rightarrow \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3k} \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{3k} \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{3 \times 2} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

۱۱ - گزینه ۳ چون در فرض مسئله مقدار $\tan x$ داده شده است، صورت و مخرج را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم تا $\tan x$ بدست آید:

$$\frac{4 \cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \div \cos x = \frac{4 \frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}}$$

$$= \frac{4 - \tan x}{\tan x + 1} = \frac{4 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{5}{3}} = 2$$

۱۲ - گزینه ۲ اگر زاویه θ در موقعیت استاندارد باشد، نقطه‌ی انتهایی کمان θ دایره‌ی مثلثاتی را طبق شکل مقابل در نقطه‌ی $\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)$ قطع می‌کند.پس $\sin \theta = \frac{1}{3}$, $\cos \theta = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ است.



$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$A = \frac{1 + \cot^2 \theta}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{1 + (-\sqrt{2})^2}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -3\sqrt{2}$$

۱۳ - گزینه ۲

$$\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{(1 + \sin \theta)^2 - (1 - \sin \theta)^2}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)}$$

$$= \frac{1 + 2\sin \theta + \sin^2 \theta - (1 - 2\sin \theta + \sin^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{1 + 2\sin \theta + \sin^2 \theta - 1 + 2\sin \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{4\sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{4}{1} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} = 4 \tan \theta \times \frac{1}{\cos \theta} = \frac{4 \tan \theta}{\cos \theta}$$

۱۴ - گزینه ۱

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 < 1 \Rightarrow \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1 + 2\sin \alpha \cos \alpha < 1 \Rightarrow 2\sin \alpha \cos \alpha < 1 - 1$$

$$\Rightarrow 2\sin \alpha \cos \alpha < 0 \xrightarrow{\div 2} \sin \alpha \cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha, \sin \alpha \text{ مختلف‌العلامه هستند}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha < 0 \\ \cot \alpha < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos \alpha > 0 \\ \sin \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha < 0 \\ \cot \alpha < 0 \end{cases} \end{cases}$$

پس در هر حالت، ۳ تا از نسبت‌های مثلثاتی منفی و یکی از آن‌ها مثبت است.

۱۵ - گزینه ۳

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{تأیید: برای هر زاویه‌ی}$$

$$A = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\Rightarrow A = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1^2 = 1$$

۱۶ - گزینه ۳

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ 1 + \cot^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

چون $\cos \alpha$ در مسئله به صورت یک رادیکال داده شده و مثبت است، مقدار مثبت را می‌پذیریم:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - m^2} \xrightarrow{(\quad)^2} 1 - \sin^2 \alpha = 1 - m^2 \Rightarrow \sin^2 \alpha = m^2$$

$$\text{از طرفی: } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(\sqrt{\frac{m}{n}} - 1\right)^2 = \frac{1}{m^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{m}{n} - 1 = \frac{1}{m^2} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{1}{m^2} \Rightarrow m^3 = n$$

۱۷ - گزینه ۲

$$\sin 155^\circ = \sin(180^\circ - 25^\circ) = \sin 25^\circ$$

$$\sin 335^\circ = \sin(360^\circ - 25^\circ) = -\sin 25^\circ$$

$$\sin 385^\circ = \sin(360^\circ + 25^\circ) = \sin 25^\circ$$

$$B = \frac{3 \sin 155^\circ}{5 \sin 335^\circ + \sin 385^\circ} = \frac{3 \sin 25^\circ}{-5 \sin 25^\circ + \sin 25^\circ} = \frac{3 \sin 25^\circ}{-4 \sin 25^\circ} = -\frac{3}{4}$$



۱۸ - گزینه ۴

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$A = \sqrt{(3 \cot \theta)^2 + 9} = \sqrt{9 \cot^2 \theta + 9} = \sqrt{9(1 + \cot^2 \theta)}$$

$$= 3\sqrt{1 + \cot^2 \theta} = 3\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta}} = 3 \times \frac{1}{|\sin \theta|} \left. \begin{array}{l} \text{ناحیهی سوم: } \theta \end{array} \right\} \Rightarrow A = 3 \times \frac{1}{-\sin \theta} = \frac{-3}{\sin \theta}$$

۱۹ - گزینه ۱

$$A = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}}$$

$$= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \frac{2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

۲۰ - گزینه ۳

$$A = \sqrt{\frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x}} \times \sin x = \sqrt{\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}} \times \sin x = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}} \times \sin x = \frac{1}{|\sin x|} \times \sin x$$

در ربع سوم، $\sin x$ منفی است. پس:

$$A = \frac{1}{-\sin x} \times \sin x = -1$$

۲۱ - گزینه ۱

بیشترین مقدار $\sin \theta$ و $\cos \theta$ برابر با ۱ است

$$3 \sin \alpha + 2 \cos \beta = 5 \Rightarrow \sin \alpha \text{ و } \cos \beta \text{ بیشترین مقدار خود را اختیار کرده اند.} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 1 \\ \cos \beta = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 1^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \\ \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta + 1^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta = 0 \Rightarrow \sin \beta = 0 \end{cases}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 0^2 + 0^2 = 0$$

۲۲ - گزینه ۳

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 - \sin \alpha \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + \sin \alpha \cos \alpha$$

۲۳ - گزینه ۴

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\underbrace{(1 + \sin \theta)}_{\text{مزدوج}} \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \underbrace{(1 - \sin \theta)}_{\text{مزدوج}} (1 - \sin \theta)$$

$$= \underbrace{(1 - \sin^2 \theta)}_{\cos^2 \theta} \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) (1 - \sin \theta) = \frac{\cos^2 \theta \overbrace{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}^{\text{مزدوج}}}{\cos \theta} = \cos \theta \times \cos^2 \theta = \cos^3 \theta$$

$$\frac{2 \sin 25^\circ + 3 \sin 34^\circ}{\cos 20^\circ - 4 \cos 43^\circ} = \frac{2 \sin(27^\circ - 2^\circ) + 3 \sin(36^\circ - 2^\circ)}{\cos(18^\circ + 2^\circ) - 4 \cos(36^\circ + 7^\circ)}$$

$$= \frac{-2 \cos 2^\circ - 3 \sin 2^\circ}{-\cos 2^\circ - 4 \cos 7^\circ} = \frac{-2 \cos 2^\circ - 3 \sin 2^\circ}{-\cos 2^\circ - 4 \sin 2^\circ}$$

۲۴ - گزینه ۱



$$\frac{\div \cos 20^\circ}{-1 - 4 \tan 20^\circ} = \frac{-2 - 3 \tan 20^\circ}{-1 - 4 \tan 20^\circ} = \frac{-2 - 3(0.36)}{-1 - 4(0.36)} = \frac{-3.08}{-2.64} = \frac{32}{26} = \frac{16}{13}$$

۲۵ - گزینه ۱ سعی کنید تمام زوایا را بر حسب 5° بنویسید.

$$A = \frac{3 \sin 18^\circ - 4 \cos 17^\circ}{5 \sin 27^\circ + \cos 63^\circ} = \frac{3 \sin(18^\circ + \delta^\circ) - 4 \cos(18^\circ - \delta^\circ)}{5 \sin(27^\circ + \delta^\circ) + \cos(36^\circ + 27^\circ + \delta^\circ)}$$

$$= \frac{-\mathfrak{r} \sin \Delta^\circ + \mathfrak{r} \cos \Delta^\circ}{-\Delta \cos \Delta^\circ + \sin \Delta^\circ} \div \sin \Delta^\circ = \frac{-\mathfrak{r} + \mathfrak{r} \cot \Delta^\circ}{-\Delta \cot \Delta^\circ + 1} = \frac{-\mathfrak{r} + \mathfrak{r}a}{-\Delta a + 1}$$

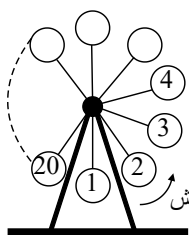
۲۶ - گزینه ۲ برای محاسبه مقدار نهایی باید کمان‌ها را به فرم دیگری بنویسیم:

$$\begin{aligned} & \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) + \cos\left(\frac{\mathfrak{Y}\pi}{q}\right) + \cos\left(\frac{\mathfrak{Y}\pi}{q}\right) + \cos\left(\frac{1\circ\pi}{q}\right) + \cos\left(\frac{11\pi}{q}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) + \cos\frac{\mathfrak{Y}\pi}{q} + \cos\left(\frac{\mathfrak{Y}\pi}{q}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{q}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\mathfrak{Y}\pi}{q}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) + \cos\left(\frac{\mathfrak{Y}\pi}{q}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\mathfrak{Y}}\right) - \cos\frac{\pi}{q} - \cos\left(\frac{\mathfrak{Y}\pi}{q}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{\mathfrak{Y}}\right) = \frac{1}{\mathfrak{Y}} \end{aligned}$$

۲۷ - گزینہ ۴

تعداد کاین‌ها ۲۰ عدد است، پس زاویه بین دو کاین متوالی برابر $\frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$ است.

از طرفی داریم:



$$\frac{\mathfrak{P}1\pi}{\mathfrak{A}} = \mathfrak{P}\pi + \frac{\pi}{\mathfrak{A}} = \mathfrak{P}\pi + \frac{\mathfrak{P}\pi}{1\circ}$$

پس هر کابین، دو دور کامل چرخیده و سپس به اندازه $\frac{\pi}{10} = 2 \times \frac{2\pi}{10}$ نسبت به وضعیت قبلی خود جلو رفته است؛ یعنی هر کابین به اندازه دو کابین جلو رفته است، پس کابین ۲ به محل کابین ۴ منتقل شده است.

۲۸ - گزینه ۳ برای حل سوال ابتدا کمان‌ها را به فرم دیگری می‌نویسیم، به طوری که زاویه 7° در مجموعه گمان وجود داشته باشد.

$$\begin{aligned} & \frac{\mathfrak{r} \sin(1\mathfrak{A}\mathfrak{V}^\circ) + \mathfrak{r} \cos(\mathfrak{V}\mathfrak{r}\mathfrak{V}^\circ)}{\mathfrak{r} \sin(\mathfrak{q}\mathfrak{V}^\circ) + \mathfrak{r} \cos(1\mathfrak{V}^\circ)} = \frac{\mathfrak{r} \sin(1\mathfrak{A}^\circ + \mathfrak{V}^\circ) + \mathfrak{r} \cos(\mathfrak{V}\mathfrak{r}^\circ + \mathfrak{V}^\circ)}{\mathfrak{r} \sin(\mathfrak{q}^\circ + \mathfrak{V}^\circ) + \mathfrak{r} \cos(1\mathfrak{A}^\circ - \mathfrak{V}^\circ)} \\ & = \frac{\mathfrak{r} \sin(\pi + \mathfrak{V}^\circ) + \mathfrak{r} \cos(\mathfrak{r}\pi + \mathfrak{V}^\circ)}{\mathfrak{r} \sin(\frac{\pi}{\mathfrak{r}} + \mathfrak{V}^\circ) + \mathfrak{r} \cos(\pi - \mathfrak{V}^\circ)} \end{aligned}$$

برای ساده سازی اول باید ناحیه را تعیین کنیم، سپس با توجه به نوع تبدیل عبارت ساده می نماییم تبدیلاتی که $k\pi$ نسبت ها را تغییر نمی دهند و تبدیلات $\frac{\pi}{2}$ فرد نسبت ها را تغییر می دهند.

$$\frac{-\mathfrak{r} \sin \mathbf{V}^\circ + \mathfrak{r} \cos \mathbf{V}^\circ}{\mathfrak{r} \cos \mathbf{V}^\circ - \mathfrak{r} \cos \mathbf{V}^\circ} = \frac{-\mathfrak{r} \sin \mathbf{V}^\circ + \mathfrak{r} \cos \mathbf{V}^\circ}{-\cos \mathbf{V}^\circ} = \mathfrak{r} \tan \mathbf{V}^\circ - \mathfrak{r} \xrightarrow{\tan \mathbf{V}^\circ = m} \mathfrak{r} m - \mathfrak{r}$$

۲۹ - گزینه ۴

$$\frac{\sin(\frac{\mathfrak{r}\pi}{\mathfrak{r}} - \alpha) + \cos(\frac{\pi}{\mathfrak{r}} + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha) + \sin(\mathfrak{r}\pi - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha - \sin \alpha}{-\cos \alpha + \sin \alpha} \frac{\div(-\cos \alpha)}{\div(-\cos \alpha)} \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + \mathfrak{r}}{1 - \mathfrak{r}} = -\mathfrak{r}$$

۳۰ - گزینه ۲ تمام زاویه ها را بر حسب ۲۰ می نویسیم.

$$\frac{\begin{aligned} & \frac{\sin 2\alpha^\circ - \cos 1\phi^\circ}{\sin 1\phi^\circ + \sin 2\alpha^\circ - \cos 1\phi^\circ} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) - \cos(\pi - 2\alpha)}{\sin(\pi - 2\alpha) + \sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) - \sin(\frac{\pi}{2} + 2\alpha)} \\ & = \frac{-\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha} = \frac{-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha} \end{aligned}}{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha} = \frac{-\cot 2\alpha}{1 - \cot 2\alpha} = \frac{\frac{-1}{\tan 2\alpha}}{1 - \frac{1}{\tan 2\alpha}} = \frac{\frac{-1}{\tan 2\alpha}}{\frac{\tan 2\alpha - 1}{\tan 2\alpha}} = -1$$

۳۱ - گزینه ۳ تمام زوایا را بر حسب 25° می نویسیم .

$$\frac{\sin 155^\circ - 3 \cos 245^\circ}{\cos 295^\circ - 2 \sin 65^\circ} = \frac{\sin(\pi - 25) - 3 \cos(\frac{7\pi}{4} - 25)}{\cos(\frac{5\pi}{4} + 25) - 2 \sin(\frac{\pi}{4} - 25)} = \frac{\sin 25 + 3 \sin 25}{\sin 25 - 2 \cos 25} = \frac{4 \sin 25}{\sin 25 - 2 \cos 25}$$

صورت و مخرج کسر را بر $\cos 25$ تقسیم می کنیم:

$$\frac{4 \tan 25}{\tan 25 - 2} = \frac{4 (0,48)}{0,48 - 2} = \frac{1,92}{-1,52} = -\frac{192}{152} = -\frac{24}{19}$$

۳۲ - گزینه ۳ داریم:

$$\begin{cases} \sin(-112^\circ) = -\sin 112^\circ = -\sin(90^\circ + 22^\circ) = -\cos 22^\circ \\ \sin 158^\circ = \sin(180^\circ - 22^\circ) = \sin 22^\circ \\ \cos 202^\circ = \cos(180^\circ + 22^\circ) = -\cos 22^\circ \end{cases}$$



$$\Rightarrow \frac{\sin(-112^\circ) + \sin 158^\circ}{\cos 202^\circ} = \frac{-\cos 22^\circ + \sin 22^\circ}{-\cos 22^\circ} = \frac{-\cos 22^\circ}{-\cos 22^\circ} + \frac{\sin 22^\circ}{-\cos 22^\circ}$$

$$= 1 - \tan 22^\circ = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

۳۳ - گزینه ۴

$$\tan \theta = 0.2 = \frac{1}{5} \Rightarrow \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = 5$$

$$\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta} \xrightarrow{\text{جملات را تقسیم بر } \sin \theta \text{ می کنیم}} \frac{1 + \cot \theta}{1 + 1} = \frac{6}{2} = 3$$

۳۴ - گزینه ۱

$$\frac{\cos 255^\circ - \cos 165^\circ}{2 \sin 75^\circ + 3 \cos 105^\circ} = \frac{\cos(270^\circ - 15^\circ) - \cos(180^\circ - 15^\circ)}{2 \sin(90^\circ - 15^\circ) + 3 \cos(90^\circ + 15^\circ)} = \frac{-\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{2 \cos 15^\circ - 3 \sin 15^\circ}$$

$$\frac{\div \cos 15^\circ}{\frac{-\tan 15^\circ + 1}{2 - 3 \tan 15^\circ}} = \frac{1 - a}{2 - 3a}$$

۳۵ - گزینه ۳ قدم اول ساده سازی محاسبه ناحیه هر کمان می باشد:

$$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} -\cos \alpha$$

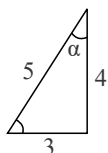
$$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \cos(3\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha) \xrightarrow{\text{ناحیه چهارم}} +\sin \alpha$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \xrightarrow{\text{ناحیه اول}} \cos \alpha$$

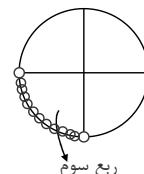
$$\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} -\sin \alpha$$

$$A = -\cos \alpha + \sin \alpha + (\cos \alpha)(-\sin \alpha)$$

$$\cot \alpha = \frac{4}{3} \quad -5\pi < \alpha < -\frac{9\pi}{2}$$



پس عبارت A برابر است با:



$$\begin{cases} \sin \alpha = -\frac{3}{5} \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$A = -(-\frac{4}{5}) + (-\frac{3}{5}) - (-\frac{3}{5})(-\frac{4}{5}) = (\frac{4}{5} - \frac{3}{5}) - \frac{12}{25} = -\frac{7}{25} = -0.28$$

۳۶ - گزینه ۳ برای حل معادله باید دو طرف معادله برحسب یک نسبت باشد. می توان از تبدیلات زیر استفاده کرد.

$$\begin{cases} \cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ \cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) \end{cases}$$

پس می توان به جای طرف دوم تبدیلات زیر را انجام داد:

$$(I) \cos(\frac{\pi}{4} - 3x) = \sin(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4} - 3x)) = \sin(\frac{\pi}{4} + 3x)$$

$$(II) \cos(\frac{\pi}{4} - 3x) = \sin(\frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{4} - 3x)) = \sin(\frac{3\pi}{4} - 3x)$$

حال در معادله به جای $\cos(\frac{\pi}{4} - 3x)$ نسبت های حاصل را در رابطه (I) و (II) را جایگذاری می نماییم:

$$(I) \sin(x + \frac{3\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4} + 3x) \rightarrow x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 3x \rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{8}$$

$$(II) \sin(x + \frac{3\pi}{4}) = \sin(\frac{3\pi}{4} - 3x) \rightarrow x + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - 3x$$

$$\rightarrow 4x = 0 \rightarrow x_2 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = \frac{5\pi}{8}$$

۳۷ - گزینه ۴

$$\alpha = \frac{\pi}{20} \quad \sqrt{2} \sin 15\alpha \longrightarrow \sqrt{2} \sin \frac{15\pi}{20}$$



$$= \sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

از طرفی اگر به زوایای داده شده در دو کسر صورت سؤال توجه کنیم، داریم:

$$3\alpha + 7\alpha = 10\alpha \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{20}} 10\left(\frac{\pi}{20}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$4\alpha + 6\alpha = 10\alpha \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{20}} 10\left(\frac{\pi}{20}\right) = \frac{\pi}{2}$$

یعنی جمع دو زاویه صورت و مخرج در هر کسر برابر $\frac{\pi}{2}$ است. بنابراین دو زاویه $(7\alpha, 3\alpha)$ و $(6\alpha, 4\alpha)$ متمم یکدیگرند. لذا $\tan 4\alpha = \cot 6\alpha$ و $\sin 3\alpha = \cos 7\alpha$ بنابراین:

$$\frac{\tan 4\alpha}{\cot 6\alpha} = 1, \frac{\sin 3\alpha}{\cos 7\alpha} = 1 \Rightarrow \text{عبارت مورد نظر} = 1 + 1 + 1 = 3$$

۳۸ - گزینه ۲ باید کمان‌ها را طوری بنویسیم که یکی از مضارب π یا مضارب $\frac{\pi}{2}$ باشد. با توجه به کمان‌های مطرح شده، می‌توان نوشت:

$$A = 2\sin^2(18^\circ + 45^\circ) + 4\sin^2(36^\circ - 6^\circ) - \frac{\cos(54^\circ + 30^\circ)}{\cos(36^\circ + 30^\circ)} - \tan(18^\circ - 45^\circ)$$

در این مرحله با توجه به ناحیه قرار گرفتن کمان، علامت هر نسبت را تعیین کرده و تغییر لازم را ایجاد می‌نماییم:

$$A = 2(-\sin(45^\circ))^2 + 4(-\sin(6^\circ))^2 - \frac{-\cos(30^\circ)}{\cos 30^\circ} - (-\tan 45^\circ)$$

$$A = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (-1) - (-1) = 1 + 3 + 1 + 1 = 6$$

۳۹ - گزینه ۴ برای حل سوال کمان‌ها را طوری بازنویسی می‌نماییم که $x + y$ آن‌ها تولید شود.

$$\tan(\Delta x + 4y) = \tan(4x + 4y + x) = \tan(4(x + y) + x) = \tan\left(4\left(\frac{\pi}{4}\right) + x\right)$$

$$= \tan(\pi + x) = \tan(x)$$

$$\tan(3x + 2y) = \tan(2x + 2y + x) = \tan(2(x + y) + x) =$$

$$\tan\left(2\left(\frac{\pi}{4}\right) + x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot(x)$$

$$A = (\tan x)(-\cot x) = -1$$

۴۰ - گزینه ۳

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 200^\circ = \sin(180^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ \\ \sin 340^\circ = \sin(360^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ \\ \cos 110^\circ = \cos(90^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ \\ \cos 250^\circ = \cos(270^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 200^\circ = \sin(180^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ \\ \sin 340^\circ = \sin(360^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ \\ \cos 110^\circ = \cos(90^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ \\ \cos 250^\circ = \cos(270^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 200^\circ = \sin(180^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ \\ \sin 340^\circ = \sin(360^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ \\ \cos 110^\circ = \cos(90^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ \\ \cos 250^\circ = \cos(270^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ \end{cases}$$

$$-\sin 20^\circ - 2 \times (-\sin 20^\circ) - \sin 20^\circ - 3 \times (-\sin 20^\circ) - 3 \sin 20^\circ$$

$$= -\sin 20^\circ + 2 \sin 20^\circ - \sin 20^\circ + 3 \sin 20^\circ - 3 \sin 20^\circ = 0$$

۴۱ - گزینه ۱

$$\begin{cases} \cos 165^\circ = \cos(180^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ \\ \sin 285^\circ = \sin(270^\circ + 15^\circ) = -\cos 15^\circ \\ \sin 345^\circ = \sin(360^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ \\ \cos 255^\circ = \cos(270^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 165^\circ = \cos(180^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ \\ \sin 285^\circ = \sin(270^\circ + 15^\circ) = -\cos 15^\circ \\ \sin 345^\circ = \sin(360^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ \\ \cos 255^\circ = \cos(270^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 165^\circ = \cos(180^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ \\ \sin 285^\circ = \sin(270^\circ + 15^\circ) = -\cos 15^\circ \\ \sin 345^\circ = \sin(360^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ \\ \cos 255^\circ = \cos(270^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{-3 \cos 15^\circ + 2 \cos 15^\circ}{-3 \sin 15^\circ + 4 \sin 15^\circ} = -\frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = -\cot 15^\circ = -\frac{1}{a}$$

۴۲ - گزینه ۳ هر گاه دو کمان متمم باشند $\tan$ اولی با $\cot$ دومی برابر است:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \tan \alpha = \cot \beta$$

$$3^\circ + 87^\circ = 90^\circ \rightarrow \tan 87^\circ = \cot 3^\circ$$

$$17^\circ + 73^\circ = 90^\circ \rightarrow \tan 73^\circ = \cot 17^\circ$$

$$37^\circ + 53^\circ = 90^\circ \rightarrow \tan 53^\circ = \cot 37^\circ$$

$$\underbrace{(\tan 3^\circ \times \cot 3^\circ)}_1 \times \underbrace{(\tan 17^\circ \times \cot 17^\circ)}_1 \times \underbrace{(\tan 37^\circ \times \cot 37^\circ)}_1 = 1$$

۴۳ - گزینه ۳ بیشترین مقدار تابع برابر ۲ است، پس داریم:

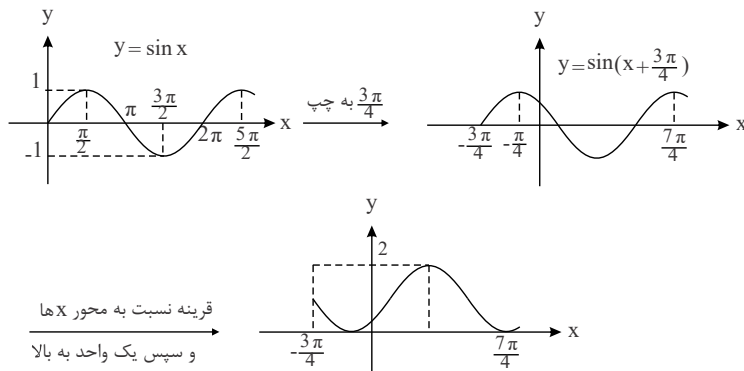
$$y = -\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \text{ماکزیم تابع} = |-1| = 1$$



$$\Rightarrow y = a - \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow a + 1 = \text{ماکزیم تابع}$$

$$\Rightarrow a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = 1 - \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$$

حال نمودار تابع f را رسم می‌کنید:



پس $b = \frac{7\pi}{4}$ و در نتیجه:

$$a \cdot b = \frac{7\pi}{4}$$

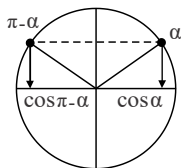
۴۴ - گزینه ۴ راه حل اول:

با توجه به رابطه $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ داریم:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{5} &= \cos \frac{3\pi}{15} = \cos\left(\pi - \frac{12\pi}{15}\right) = -\cos \frac{12\pi}{15} \\ \cos \frac{5\pi}{15} &= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \cos \frac{7\pi}{15} &= \cos\left(\pi - \frac{8\pi}{15}\right) = -\cos \frac{8\pi}{15} \\ \Rightarrow \cos^3 \frac{\pi}{5} + \cos^3 \frac{5\pi}{15} + \cos^3 \frac{7\pi}{15} + \cos^3 \frac{8\pi}{15} + \cos^3 \frac{12\pi}{15} \\ \Rightarrow \cos^3 \frac{\pi}{5} + \cos^3 \frac{5\pi}{15} + \cos^3 \frac{7\pi}{15} + \cos^3 \frac{8\pi}{15} + \cos^3 \frac{12\pi}{15} \\ = -\cos^3 \frac{12\pi}{15} + \frac{1}{8} - \cos^3 \frac{8\pi}{15} + \cos^3 \frac{8\pi}{15} + \cos^3 \frac{12\pi}{15} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

راه حل دوم:

هرگاه دو زاویه مکمل یکدیگر باشند کسینوس‌های آن‌ها قرینه یکدیگر می‌باشند.



$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \rightarrow \cos(\pi - \alpha) + \cos \alpha = 0$$

$$\cos^3\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos^3\left(\frac{5\pi}{15}\right) + \cos^3\left(\frac{7\pi}{15}\right) + \cos^3\left(\frac{8\pi}{15}\right) + \cos^3\left(\frac{12\pi}{15}\right)$$

$$= \underbrace{\left(\cos^3\left(\frac{3\pi}{15}\right) + \cos^3\left(\frac{12\pi}{15}\right)\right)}_{\text{مکمل}} + \underbrace{\left(\cos^3\left(\frac{7\pi}{15}\right) + \cos^3\left(\frac{8\pi}{15}\right)\right)}_{\text{مکمل}} + \cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 + 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$



پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۸ - ۳	۱۵ - ۳	۲۲ - ۳	۲۹ - ۴	۳۶ - ۳	۴۳ - ۳
۲ - ۴	۹ - ۲	۱۶ - ۳	۲۳ - ۴	۳۰ - ۲	۳۷ - ۴	۴۴ - ۴
۳ - ۳	۱۰ - ۲	۱۷ - ۲	۲۴ - ۱	۳۱ - ۳	۳۸ - ۲	
۴ - ۲	۱۱ - ۳	۱۸ - ۴	۲۵ - ۱	۳۲ - ۳	۳۹ - ۴	
۵ - ۲	۱۲ - ۲	۱۹ - ۱	۲۶ - ۲	۳۳ - ۴	۴۰ - ۳	
۶ - ۳	۱۳ - ۲	۲۰ - ۳	۲۷ - ۴	۳۴ - ۱	۴۱ - ۱	
۷ - ۳	۱۴ - ۱	۲۱ - ۱	۲۸ - ۳	۳۵ - ۳	۴۲ - ۳	