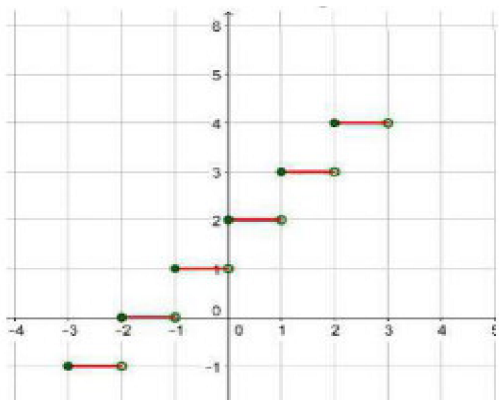




۱- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [x] + 2$ و دامنه‌ی $D_f = [-3, 3)$ را رسم کنید.

« پاسخ »



$$f(x) = -3 + 2 = -1 \quad -3 \leq x < -2$$

$$f(x) = -2 + 2 = 0 \quad -2 \leq x < -1$$

$$f(x) = -1 + 2 = 1 \quad -1 \leq x < 0$$

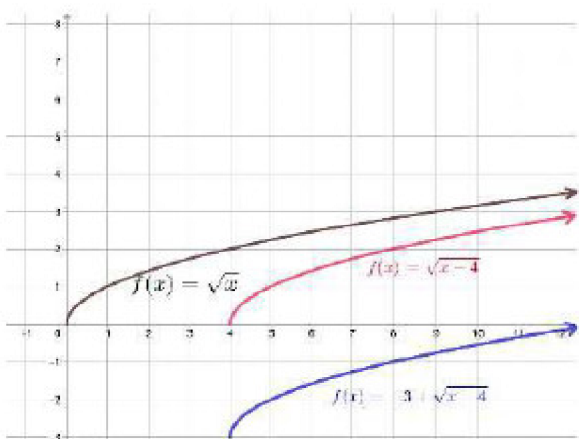
$$f(x) = 0 + 2 = 2 \quad 0 \leq x < 1$$

$$f(x) = 1 + 2 = 3 \quad 1 \leq x < 2$$

$$f(x) = 2 + 2 = 4 \quad 2 \leq x < 3$$

۲- نمودار تابع با ضابطه‌ی $g(x) = -3 + \sqrt{x-4}$ را رسم کنید.

« پاسخ »





۳- در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف) $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \frac{|x|}{x}$ (الف)
 ب) $f(x) = x - 2$, $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ (ب)

« پاسخ »

الف) دامنه‌ی این دو تابع با هم برابر است. $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\}$
 پس از ساده کردن تابع g مشاهده می‌کنیم که ضابطه‌ی این دو تابع نیز با هم برابر است:

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow g(x) = \frac{x}{x} = 1 \\ x < 0 \Rightarrow g(x) = \frac{-x}{x} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

ب) می‌دانیم دامنه‌ی این دو تابع عبارت است از: $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$
 با وجود این‌که اگر $g(x)$ را ساده کنیم ضابطه‌ی آن با ضابطه‌ی $f(x)$ برابر می‌شود اما چون دامنه‌ها برابر نیستند نمی‌توانیم بگوییم که دو تابع برابر هستند.

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)} = x - 2$$

۴- آیا دو تابع $f(x) = \sqrt{x} \sqrt{x - 1}$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$ با هم مساوی‌اند؟ چرا؟

« پاسخ »

$$D_f : x \geq 0 \cap x \geq 1 \Rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

$$D_g : x^2 - x \geq 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

$$D_f \neq D_g$$



۵- دامنه توابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{x^3 - 25x}$

ب) $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{4x - 1}{x^2 - 3x}$

« پاسخ »

الف) $D_f: x^3 - 25x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$

$p = x^3 - 25x$

$D_f = [-5, 0] \cup [5, +\infty)$

x	$-\infty$	-5	0	5	$+\infty$
x	-	-	+	+	
$x^2 - 25$	+	-	-	+	
p	-	+	-	+	
$p \geq 0$		ج	ج	ج	

ب) $D_g: \begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1 \\ x^2 - 3x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, 3 \end{cases} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0, 3, \pm 1\}$

۶- اگر $f(x) = \frac{x - 7}{x^2 + ax + b - 1}$ دامنه اش $\mathbb{R} - \{2\}$ باشد، a , b را حساب کنید.

« پاسخ »

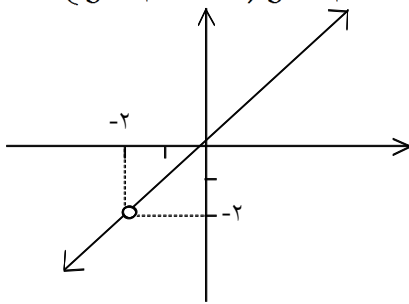
$x = 2 \Rightarrow x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b - 1 = 4 \Rightarrow b = 5 \end{cases}$

۷- اگر $f(x) = \frac{x^2 + ax + b - 7}{x + 2}$ تابع همانی باشد، مقدار a و b را مشخص کنید و نمودار تابع را رسم کنید.

« پاسخ »

$$f(x) = x(x \neq -2) \Rightarrow \frac{x^2 + ax + b - 7}{x + 2} = x \Rightarrow \cancel{x} + ax + b - 7 = \cancel{x} + 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - 7 = 0 \Rightarrow b = 7 \end{cases}$$



$$D = \mathbb{R} - \{-2\}$$

۸- دامنه‌ی تابع زیر را حساب کنید.

$$g(x) = \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{3 - |x|}} \quad \text{ب)}$$

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{\sqrt{-x}} \quad \text{الف)}$$

« پاسخ »

$$\text{الف)} \begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ -x > 0 \Rightarrow x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = [-2, 0)$$

$$\text{ب)} \begin{cases} -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \\ 3 - |x| > 0 \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_g = (-3, 0]$$

۹- اگر $f(x) = \frac{2x + 1}{4x - 1}$ ، دامنه $f(2x - 4)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$f(2x - 4) = \frac{2(2x - 4) + 1}{4(2x - 4) - 1} = \frac{4x - 7}{8x - 17} \Rightarrow 8x - 17 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{17}{8}$$

$$D_{f(2x - 4)} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{17}{8} \right\}$$



۱۰- اگر $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = x + 1$ باشد، نمودار تابع $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ را رسم کنید.

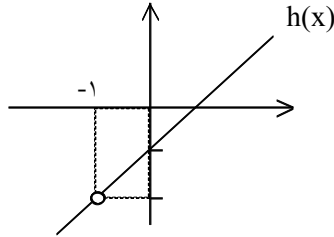
« پاسخ »

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = x - 1$$

$$D_h = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$h(x) = x - 1 \xrightarrow{x \neq -1} y \neq -2$$

x	۰	۱
y	-۱	۰



۱۱- دامنه توابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{x^2 + |x| - 9}$

ب) $g(x) = \frac{x + 9}{x^2 - \sqrt{|x|} + 1}$

« پاسخ »

$$\text{الف) } x^2 + |x| - 9 \geq 0 \xrightarrow{x^2 = |x|^2} |x|^2 + |x| - 9 \geq 0 \Rightarrow (|x| - 9)(\underbrace{|x| + 1}_\text{همواره مثبت}) \geq 0$$

$$\Rightarrow |x| - 9 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 9 \Rightarrow x \geq 9 \text{ یا } x \leq -9$$

$$D_f = (-\infty, -9] \cup [9, +\infty)$$

ب) $x^2 - \sqrt{|x|} + 1 = 0 \xrightarrow{x^2 = |x|^2} |x|^2 - \sqrt{|x|} + 1 = 0$

$$\Rightarrow (|x| - 2)(|x| - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2 \\ |x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5 \end{cases}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{\pm 2, \pm 5\}$$



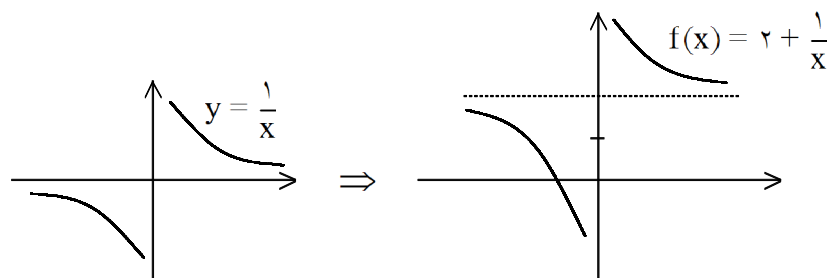
۱۲- نمودار توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را حساب کنید.

الف) $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$

ب) $g(x) = \frac{1}{2+x}$

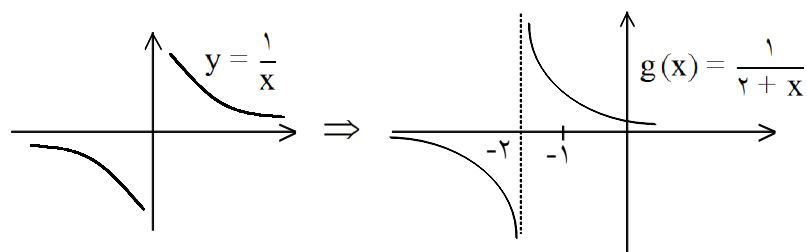
« پاسخ »

الف)



$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ R_f = \mathbb{R} - \{2\} \end{cases}$$

ب)



$$\begin{cases} D_g = \mathbb{R} - \{-2\} \\ R_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

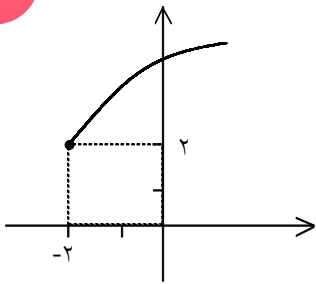
۱۳- اگر دامنه $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + a}$ برابر $\mathbb{R} - \{b\}$ باشد، a ، b را حساب کنید.

« پاسخ »

مخرج فقط یک ریشه‌ی مضاعف دارد بنابراین $\Delta = 0$ است.

$$\Delta = 0 \Rightarrow 16 - 4a = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow b = -2$$



۱۴- نمودار $f(x) = \sqrt{x-a} + b - 1$ به صورت زیر است.

الف) a, b را حساب کنید.

ب) $f\left(\frac{1}{4}\right)$ را بنویسید.

« پاسخ »

الف) نمودار تابع $y = \sqrt{x-a} + b - 1$ واحد به طرف x های منفی رفته بنابراین درون رادیکال $x + 2$ است و سپس دو واحد بالا رفته بنابراین باید کل تابع را با عدد ۲ جمع کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x-a} + b - 1 \Rightarrow \begin{cases} -a = 2 \Rightarrow a = -2 \\ b - 1 = 2 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

ب) مقدار تابع در $x = \frac{1}{4}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} + 2 = \sqrt{\frac{9}{4}} + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

۱۵- دامنه و برد توابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x) = 2 - \sqrt{2-x}$

ب) $g(x) = 2\sqrt{5-x} + 7$

« پاسخ »

الف)

$$D_f: 2-x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -2 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2]$$

$$R_f: \sqrt{2-x} \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} -\sqrt{2-x} \leq 0 \xrightarrow{+2} 2 - \sqrt{2-x} \leq 2 \Rightarrow y \leq 2 \Rightarrow R_f = (-\infty, 2]$$

ب)

$$D_g: 5-x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -5 \Rightarrow x \leq 5 \Rightarrow D_g = (-\infty, 5]$$

$$R_g: \sqrt{5-x} \geq 0 \xrightarrow{\times 2} 2\sqrt{5-x} \geq 0 \xrightarrow{+7} 2\sqrt{5-x} + 7 \geq 7 \Rightarrow y \geq 7 \Rightarrow R_g = [7, +\infty)$$



۱۶- ضابطه‌ی وارون هریک از توابع با ضابطه‌های زیر را بیابید.

الف) $f(x) = 5x - 2$

ب) $f(x) = \frac{3}{5}x + 4$

پ) $f(x) = \frac{-7x + 3}{5}$

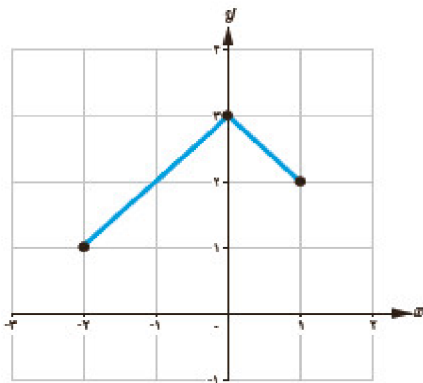
« پاسخ »

الف) $y = 5x - 2 \Rightarrow 5x - 2 = y \Rightarrow 5x = y + 2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{5} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{5}$

ب) $y = \frac{3}{5}x + 4 \Rightarrow 5y = 3x + 20 \Rightarrow 3x + 20 = 5y \Rightarrow 3x = 5y - 20 \Rightarrow x = \frac{5y - 20}{3}$

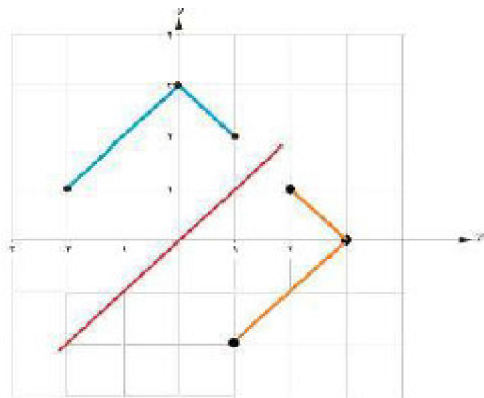
$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5x - 20}{3}$

ج) $y = \frac{-7x + 3}{5} \Rightarrow 5y = -7x + 3 \Rightarrow 7x = -5y + 3 \Rightarrow x = \frac{-5y + 3}{7} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-5x + 3}{7}$



۱۷- نمودار وارون تابع داده شده در شکل مقابل را رسم کنید.

« پاسخ »





۱۸- وارون تابع $f = \{(2, 3), (-2, 1), (-1, 2)\}$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$f^{-1} = \{(3, 2), (1, -2), (2, -1)\}$$

۱۹- تابع $f = \{(m^4 + 2, 5), (n^3 + 1, 4)\}$ مفروض است. m و n را طوری تعیین کنید که برد وارون f ، $\{-7, 18\}$ باشد.

« پاسخ »

$$f = \{(m^4 + 2, 5), (n^3 + 1, 4)\}$$

$$f^{-1} = f = \{(5, m^4 + 2), (4, n^3 + 1)\} \Rightarrow R_{f^{-1}} = \{m^4 + 2, n^3 + 1\}$$

اگر $\{m^4 + 2, n^3 + 1\} = \{-7, 18\}$ ، از آن که $m^4 + 2$ همواره مثبت است باید برابر با ۱۸ و $n^3 + 1$ برابر با (-7) باشد، پس:

$$\begin{cases} m^4 + 2 = 18 \Rightarrow m^4 = 16 \Rightarrow m = \pm 2 \\ n^3 + 1 = -7 \Rightarrow n^3 = -8 \Rightarrow n^3 = (-2)^3 \Rightarrow n = -2 \end{cases}$$

۲۰- اگر $f(x) = 2x - 6$ و $g(x) = 5 + 2x$ باشد، دامنه $h(x) = \sqrt{f^{-1}(x)} + \frac{3x-1}{g^{-1}(x)}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$f(x) = 2x - 6 \Rightarrow y = 2x - 6 \Rightarrow y + 6 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+6}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x+6}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+6}{2}$$

$$g(x) = 5 + 2x \Rightarrow y = 5 + 2x \Rightarrow y - 5 = 2x \Rightarrow x = \frac{y-5}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x-5}{2}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

$$h(x) = \sqrt{f^{-1}(x)} + \frac{3x-1}{g^{-1}(x)} \Rightarrow h(x) = \sqrt{\frac{x+6}{2}} + \frac{3x-1}{\frac{x-5}{2}}$$

$$\begin{cases} \frac{x+6}{2} \geq 0 \Rightarrow x \geq -6 \Rightarrow D_h = [-6, +\infty) - \{5\} \\ x-5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5 \end{cases}$$



۲۱- اگر $f(x) = 6 - 2x$ باشد، دامنه $h(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$f(x) = 6 - 2x \Rightarrow y = 6 - 2x \Rightarrow 2x = 6 - y \xrightarrow{\div 2} x = 3 - \frac{y}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = 3 - \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 3 - \frac{x}{2}$$

$$h(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)} = \frac{1}{\frac{6-x}{2}} = \frac{2}{6-x}$$

$$6 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 6 \Rightarrow D_h = R - \{6\}$$

۲۲- در یک تابع خطی اگر $f(1) = 5$ و $f^{-1}(9) = 3$ باشد، $f^{-1}(13)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

تابع خطی است بنابراین ضابطه آن را به صورت $f(x) = ax + b$ می‌نویسیم.

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(1) = a + b = 5$$

$$f^{-1}(9) = 3 \Rightarrow f(3) = 9 \Rightarrow 3a + b = 9$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ -3a - b = -9 \end{cases} \Rightarrow -2a = -4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 3$$

$$f(x) = 2x + 3$$

$$f^{-1}(13) = a \Rightarrow f(a) = 13 \Rightarrow 2a + 3 = 13 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

۲۳- اگر $f(x) + f^{-1}(6) = 2x + 10$ باشد، مقدار $\frac{1+f(1)}{2-f^{-1}(0)}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$(6, f^{-1}(6)) \in f^{-1} \Rightarrow (f^{-1}(6), 6) \in f \Rightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(6) \\ f(x) = 6 \end{cases} \Rightarrow 6 + f^{-1}(6) = 2f^{-1}(6) + 10$$

$$\Rightarrow f^{-1}(6) = -4$$

$$f(x) - 4 = 2x + 10 \Rightarrow f(x) = 2x + 14$$

$$f(1) = 2 + 14 = 16$$

$$f^{-1}(0) = a \Rightarrow f(a) = 0 \Rightarrow 2a + 14 = 0 \Rightarrow a = -7$$

$$\frac{1+f(1)}{2-f^{-1}(0)} = \frac{1+16}{2+7} = \frac{17}{9}$$



۲۴- اگر تابع خطی f نمودار $g(x) = x^2 - 2x + 1$ را در نقاطی به طول ۱ و ۳ قطع کند، ضابطه‌ی وارون f را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow g(1) = 0 \Rightarrow A(1, 0) \\ x = 3 &\Rightarrow g(3) = 4 \Rightarrow B(3, 4) \\ m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{3 - 1} = 2 \\ y - y_1 &= m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2 \\ y + 2 &= 2x \xrightarrow{\div 2} \frac{y + 2}{2} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x + 2}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{2} \end{aligned}$$

۲۵- اگر f یک تابع خطی باشد و $f(x + 1) + f(x + 2) = 4x + 7$ ، مقدار $f^{-1}(3)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

چون f یک تابع خطی است. بنابراین $f(x) = ax + b$ است.

$$\begin{aligned} f(x + 1) + f(x + 2) &= 4x + 7 \Rightarrow a(x + 1) + b + a(x + 2) + b = 4x + 7 \\ \Rightarrow ax + a + b + ax + 2a + b &= 4x + 7 \Rightarrow 2ax + 3a + 2b = 4x + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \\ 3a + 2b = 7 \xrightarrow{a=2} 6 + 2b = 7 \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2}$$

$$f^{-1}(3) = k \Rightarrow f(k) = 3 \Rightarrow 2k + \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow 2k = 3 - \frac{1}{2} \Rightarrow 2k = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow k = \frac{5}{4} \Rightarrow f^{-1}(3) = \frac{5}{4}$$

۲۶- اگر $f = \{(-1, 2), (0, 3), (4, -1)\}$ باشد، تابع f^{-1} را بیابید و دامنه و برد آنرا مشخص کنید.

« پاسخ »

$$f = \{(-1, 2), (0, 3), (4, -1)\}$$

$$f^{-1} = \{(2, -1), (3, 0), (-1, 4)\}$$

$$D_{f^{-1}} = \{2, 3, -1\} = R_f$$

$$R_{f^{-1}} = \{-1, 0, 4\} = D_f$$

۲۷- در جدول زیر وارون توابع را نوشته و مشخص کنید وارون کدام تابع، تابع است؟

$f = \{(1, 5), (3, 7), (4, 9)\}$	$f^{-1} =$
$g = \{(1, 2), (3, 2), (5, 10)\}$	$g^{-1} =$
$h = \{(1, 2), (3, 4), (5, 2)\}$	$h^{-1} =$

« پاسخ »

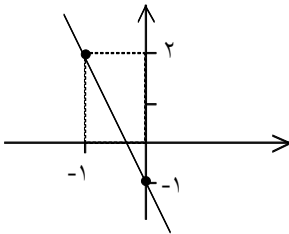
برای نوشتن وارون یک تابع باید جای مؤلفه‌ی اول و دوم را عوض کنیم.

$$f^{-1} = \{(5, 1), (7, 3), (9, 4)\} \quad f^{-1} \text{ تابع است}$$

$$g^{-1} = \{(2, 1), (2, 3), (10, 5)\} \quad g^{-1} \text{ تابع نیست}$$

$$h^{-1} = \{(2, 1), (4, 3), (2, 5)\} \quad h^{-1} \text{ تابع نیست}$$

۲۸- وارون تابع خطی زیر را حساب کنید.



« پاسخ »

f یک تابع خطی است و $f(x) = ax + b$ بنابراین:

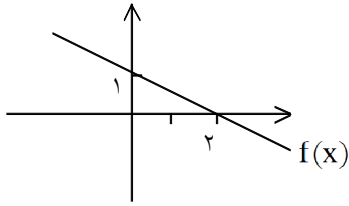
$$A(0, -1) \Rightarrow a(0) + b = -1 \Rightarrow b = -1$$

$$B(-1, 2) \Rightarrow a(-1) - 1 = 2 \Rightarrow a = -3$$

$$f(x) = -3x - 1 \Rightarrow y = -3x - 1 \Rightarrow y + 1 = -3x \xrightarrow{\div(-3)} \frac{y+1}{-3} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x+1}{-3}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{-3}$$

۲۹- با توجه به نمودار تابع خطی $f(x)$ ضابطه‌ی معکوس آن را بنویسید.



« پاسخ »

چون $f(x)$ یک تابع خطی است بنابراین ضابطه‌ی آن به صورت $f(x) = ax + b$ است.

$$A(0, 1) \Rightarrow a(0) + b = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$B(2, 0) \Rightarrow a(2) + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}x \xrightarrow{\times(-2)} -2y + 2 = x$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = -2x + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -2x + 2$$

۳۰- اگر تابع $f = \{(1, a + 2b), (-2, 3), (2a - b, 3), (1, 4), (2, 5)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

« پاسخ »

$$(1, a + 2b), (1, 4) \in f \xrightarrow{f \text{ تابع است}} a + 2b = 4 \quad (1)$$

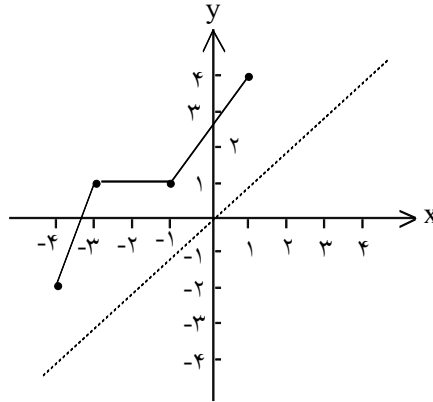
$$(-2, 3), (2a - b, 3) \in f \xrightarrow{f \text{ تابعی یک به یک است}} 2a - b = -2 \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow 2 \times \begin{cases} a + 2b = 4 \\ 2a - b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 4 \\ 4a - 2b = -4 \end{cases} \Rightarrow 5a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\xrightarrow{(1)} 0 + 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

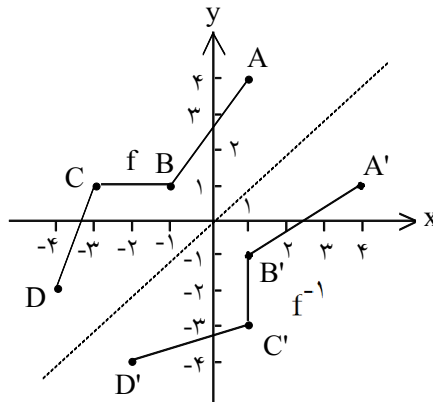


۳۱- نمودار وارون تابع زیر را رسم کنید. آیا نموداری که رسم می کنید خودش تابع است؟ آیا نمودار f یک به یک است؟



« پاسخ »

کافی است قرینه‌ی نقاط مهم شکل (A, B, C و D) را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و آن‌ها را با خطوط راست به هم وصل کنیم، مثلاً $A(1, 4) \Rightarrow A'(4, 1)$ ضمناً f^{-1} تابع نیست چون f یک به یک نیست.

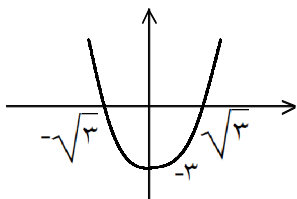


۳۲- به کمک نمودار بررسی آیا تابع زیر یک به یک است؟

$$f(x) = x^2 - 3$$

« پاسخ »

با توجه به شکل به عنوان مثال دو مقدار $x = \sqrt{3}$ و $x = -\sqrt{3}$ ، y یکسان (صفر) می‌دهند پس f یک به یک نمی‌باشد.





۳۳- معکوس توابع زیر را بنویسید و دامنه و برد آنها را با دامنه و برد f و g مقایسه کنید.

الف) $f = \{(-1, 0), (2, 1), (3, -1), (-2, 3)\}$

ب) $g = \{(a, b), (c, d), (e, f), (g, h)\}$

« پاسخ »

الف) $f^{-1} = \{(0, -1), (1, 2), (-1, 3), (3, -2)\}$

دامنه ی $f = f^{-1}$ برد $= \{-1, 2, 3, -2\}$

f^{-1} دامنه ی $f = f$ برد $= \{0, 1, -1, 3\}$

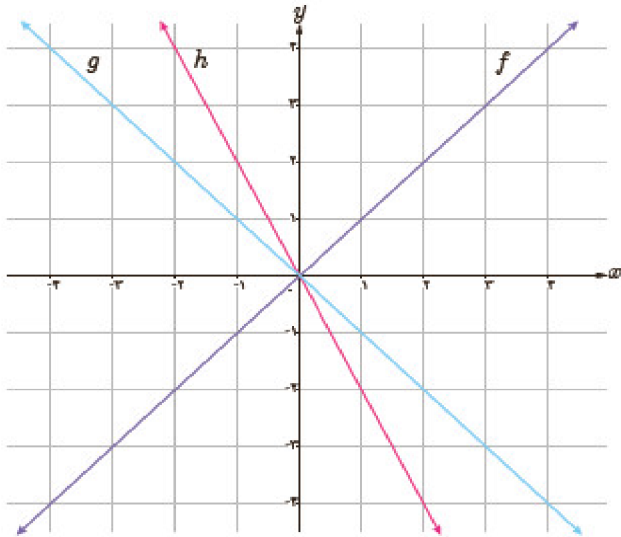
ب) $g^{-1} = \{(b, a), (d, c), (f, e), (h, g)\}$

دامنه $g = g^{-1}$ برد $= \{a, c, e, g\}$

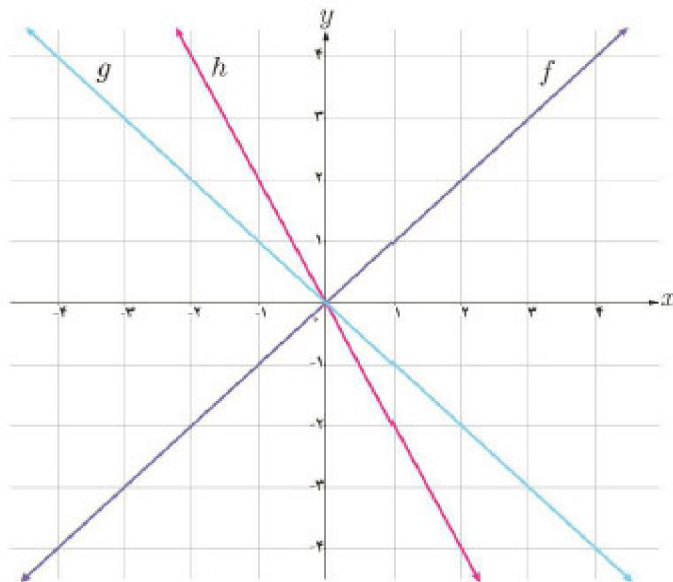
g^{-1} دامنه $= g$ برد $= \{b, d, f, h\}$



۳۴- با توجه به نمودار سه تابع داده شده، مشخص کنید کدام یک از آن‌ها برابر مجموع دو تابع دیگر است؟



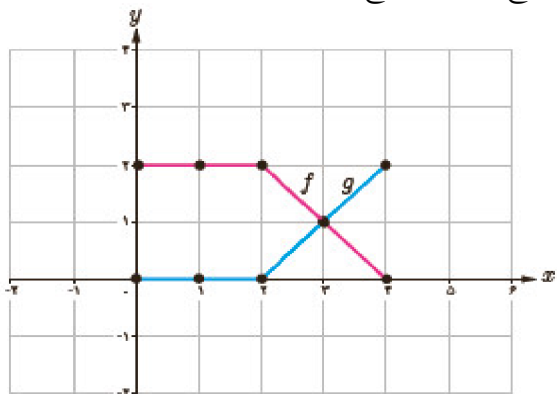
« پاسخ »



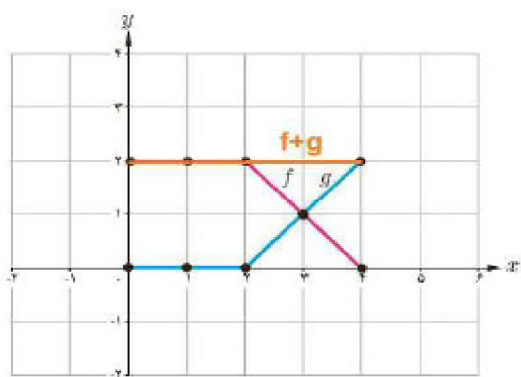
$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ h(1) = -2 \\ g(1) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) + h(1) = g(1)$$
$$(f+h)(x) = g(x)$$



۳۵- در شکل مقابل، نمودار دو تابع f و g رسم شده است. نمودار حاصل جمع این دو تابع را به دست آورید.



« پاسخ »





۳۶- با استفاده از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، هریک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

ب) $s(x) = -\sqrt{x-2}$

ت) $u(x) = 1 - \sqrt{x}$

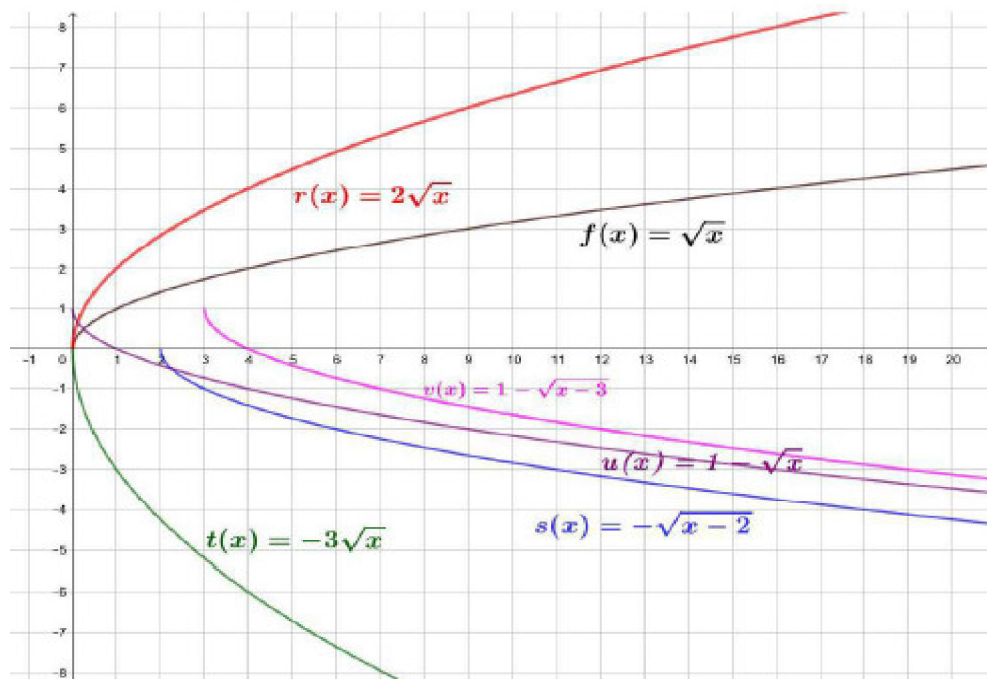
الف) $r(x) = 2\sqrt{x}$

پ) $t(x) = -3\sqrt{x}$

ث) $v(x) = 1 - \sqrt{x-3}$

« پاسخ »

الف) با توجه به این که $r(x) = 2f(x)$ کافی است عرض‌های هر نقطه از نمودار f را دو برابر کنیم.
 ب) با توجه به این که $s(x) = -f(x-2)$ کافی است ابتدا نمودار f را به اندازه‌ی ۲ واحد روی محور طول‌ها به سمت مثبت‌ها انتقال دهیم سپس آن‌را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم.
 پ) با توجه به این که $t(x) = 3f(x)$ کافی است ابتدا عرض‌های هر نقطه از نمودار f را سه برابر کنیم سپس نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم.
 ت) با توجه به این که $u(x) = -f(x) + 1$ کافی است ابتدا نمودار f را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم سپس نمودار جدید را به اندازه‌ی ۱ واحد روی محور عرض‌ها به سمت مثبت‌ها انتقال دهیم.
 ث) با توجه به این که $v(x) = -f(x-3) + 1$ کافی است ابتدا نمودار f را به اندازه‌ی ۳ واحد روی محور طول‌ها به سمت مثبت‌ها انتقال دهیم سپس نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم بعد نمودار جدید را به اندازه‌ی ۱ واحد روی محور عرض‌ها به سمت مثبت‌ها انتقال دهیم.





۳۷- در هر مورد، دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$g(x) = x + 2 \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = |x|$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = \frac{x-2}{x+5}$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 10 \quad (\text{ت})$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = -\sqrt{x} \quad (\text{پ})$$

$$f = \{(2, 5), (3, 4), (0, -2)\}$$

$$g = \{(-1, 2), (0, 3), (2, 4), (3, 0)\} \quad (\text{ث})$$

« پاسخ »

(الف)

تابع	ضابطه	دامنه
$f + g$	$(f + g)(x) = x + x$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
$f - g$	$(f - g)(x) = x - x$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = x x = x x $	$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{ x }{x}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$

(ب)

تابع	ضابطه	دامنه
$f + g$		$D_{f+g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
$f - g$		$D_{f-g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
$f \cdot g$		$D_{f \cdot g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
$\frac{f}{g}$		$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-2\}$

(پ)

تابع	ضابطه	دامنه
$f + g$	$(f + g)(x) = \sqrt{x} + (-\sqrt{x}) = 0$	$D_{f+g} = [0, +\infty)$
$f - g$	$(f - g)(x) = \sqrt{x} - (-\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$	$D_{f-g} = [0, +\infty)$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x}(-\sqrt{x}) = -x$	$D_{f \cdot g} = [0, +\infty)$
$\frac{f}{g}$		$D_{\frac{f}{g}} = [0, +\infty) - \{0\} = [0, +\infty]$

(ت)



۳۸- تابع $y = f(x)$ با دامنه $[-2, 1]$ و برد $[-3, 4]$ را در نظر بگیرید:
دامنه تابع $g(x) = -3f(2x + 1)$ برابر و برد آن برابر است.

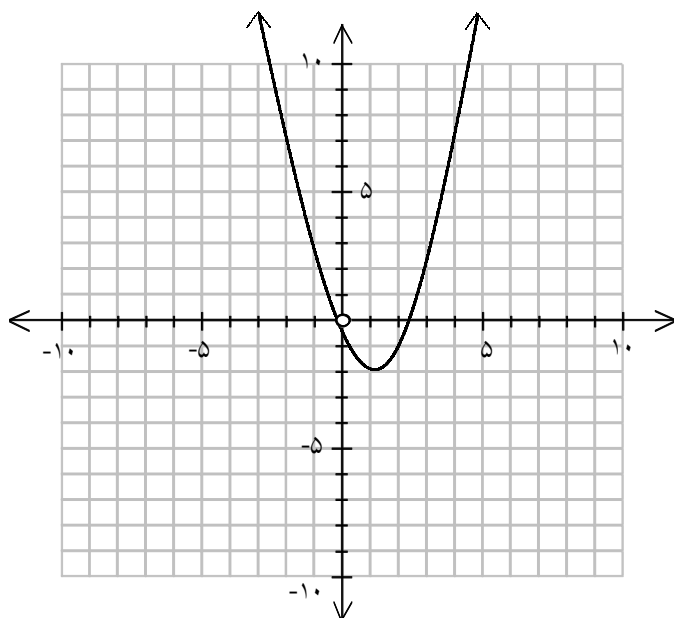
« پاسخ »

$$D_g : -2 \leq 2x + 1 \leq 1 \xrightarrow{-1} -3 \leq 2x \leq 0 \xrightarrow{\div 2} -\frac{3}{2} \leq x \leq 0 \Rightarrow D_g = \left[-\frac{3}{2}, 0\right]$$

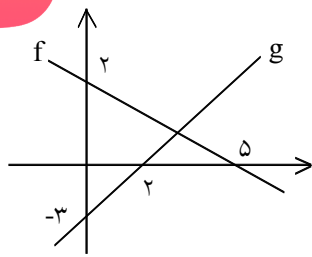
$$R_g : -3 \leq f(2x + 1) \leq 4 \xrightarrow{\times (-3)} -12 \leq -3f(2x + 1) \leq 12 \Rightarrow R_g = [-12, 12]$$

۳۹- نمودار تابع $f(x) = (x - 1)^2 - 2$ را رسم کنید.

« پاسخ »



$$\begin{aligned} \text{الف) } D_f &= [-1, +\infty) \quad (\bullet/25) & D_g &= \mathbb{R} - \{2\} \quad (\bullet/25) \\ \text{ب) } D_g^f &= D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = \bullet\} = [-1, +\infty) - \{2\} - \{-1\} = (-1, 2) \cup (2, +\infty) \\ & & (\bullet/25) & (\bullet/25) \\ 2f(3) - g(3) &= 2(2) - 4 = \bullet \quad (\bullet/25) \\ & (\bullet/25) \end{aligned}$$



۴۲- نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه توابع $f + g$ و $f \cdot g$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\left| \begin{array}{cc} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{array} \right| \Rightarrow m = -\frac{2}{5} \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{5}x + 2$$

$$\left| \begin{array}{cc} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{array} \right| \Rightarrow m = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

$$f + g = -\frac{2}{5}x + 2 + \frac{3}{2}x - 3 = \frac{11}{10}x - 1$$

$$f \cdot g = \left(-\frac{2}{5}x + 2\right)\left(\frac{3}{2}x - 3\right) = \frac{3}{5}x^2 + \frac{21}{5}x - 6$$

۴۳- اگر $f = \{(1, 2), (4, 7), (3, 5), (5, -1)\}$ و $g(x) = \sqrt{x+6}$ ، آنگاه $(2f + g)(3)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$(2f + g)(3) = 2f(3) + g(3) = 2 \times 5 + \sqrt{3+6} = 10 + \sqrt{9} = 13$$

۴۴- اگر $(f + g)(x) = 5x + 4$ و $(f - g)(x) = 2 - 3x$ باشد، دامنه‌ی $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 5x + 4 \Rightarrow 2f(x) = 2x + 6 \Rightarrow f(x) = x + 3$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 2 - 3x$$

$$\Rightarrow x + 3 + g(x) = 5x + 4 \Rightarrow g(x) = 4x + 1$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$$

۴۵- اگر $f(x) = ax + b$ و $g(x) = 2x + 7$ و $f(1) = 4$ باشد در صورتی که $(f + g)(2) = 17$ باشد a ، b را حساب کنید.

« پاسخ »

$$f(1) = 4 \Rightarrow a + b = 4$$

$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 2a + b + 4 + 7 = 17 \Rightarrow 2a + b = 6$$

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 2a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 2$$

۴۶- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{-x}$ ، نمودار $y = (f + g)(x)$ را رسم کنید.

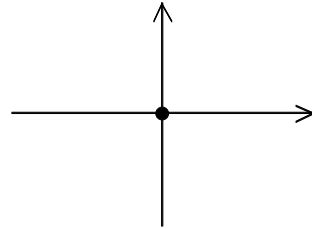
« پاسخ »

$$D_f : x \geq 0 \Rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

$$D_g : -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0] \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = [0, +\infty) \cap (-\infty, 0] = \{0\}$$

$$y = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x} \xrightarrow{x=0} y = 0$$

$$\{(0, 0)\}$$



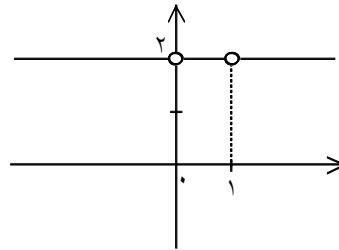
۴۷- اگر $f(x) = x^2 - x$ و $g(x) = \frac{2}{f(x)}$ باشد نمودار $y = (f \times g)(x)$ را رسم کنید.

« پاسخ »

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\} \Rightarrow D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

$$y = (f \times g)(x) = (x^2 - x) \times \frac{2}{x^2 - x} = 2$$



۴۸- اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = 1 - \sqrt{x}$ دامنه و برد تابع $y = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$D_f = D_g = [0, +\infty)$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = [0, +\infty) - \{1\}$$

$$y = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{x} - \sqrt{x}}{-(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{-(\sqrt{x} - 1)} = -\sqrt{x}$$

$$y = -\sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x} \leq 0 \Rightarrow y \leq 0 \\ x \neq 1 \Rightarrow -\sqrt{x} \neq -1 \Rightarrow y \neq -1 \end{cases} \Rightarrow R = (-\infty, 0] - \{-1\}$$



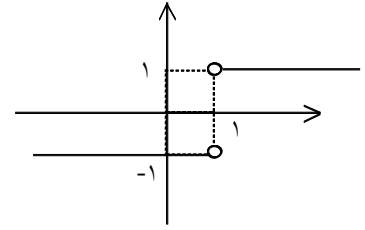
۴۹- اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ باشند، نمودار $y = (f \times g)(x)$ را رسم کنید.

« پاسخ »

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$y = (f \times g)(x) = \frac{1}{x-1} \times \sqrt{(x-1)^2} = \frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$$



۵۰- اگر $f(x) = \sqrt{a-1-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-3b+1}$ و تابع $2f + g$ به صورت $\{(2, c-1)\}$ باشد، آنگاه مقادیر a, b, c را حساب کنید.

« پاسخ »

$$D_f : a-1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq a-1$$

$$D_g : x-3b+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3b-1 \Rightarrow D_{2f+g} = D_f \cap D_g = \{2\} \Rightarrow a-1 = 3b-1 = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{2-x}$$

$$g(x) = \sqrt{x-2} \Rightarrow (2f+g)(2) = 2f(2) + g(2) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow c-1 = 0 \Rightarrow c = 1$$

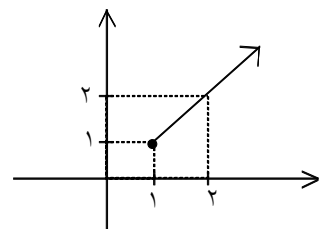
۵۱- اگر $f(x) = x - \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ باشند، نمودار $y = (f+g)(x)$ را رسم کنید.

« پاسخ »

$$D_f : x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

$$D_g : x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_g = [1, +\infty) \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = [1, +\infty)$$

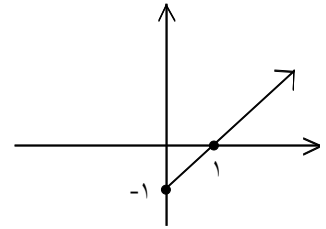
$$y = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x - \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = x$$





۵۲- اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{x} - 1$ باشد، نمودار $y = (f + g)(x)$ را رسم کنید.

« پاسخ »



$$D_f : x \geq 0 \Rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

$$D_g : x \geq 0 \Rightarrow D_g = [0, +\infty)$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [0, +\infty) \cap [0, +\infty) = [0, +\infty)$$

$$y = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = x - \sqrt{x} + \sqrt{x} - 1 = x - 1$$

x	0	1
y	-1	0

۵۳- اگر $f(x) = 2x + n$ و $g(x) = x^3 + 1$ و $(f + g)(2) = 8$ ، مقدار n را حساب کنید.

« پاسخ »

$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 4 + n + 8 + 1 = 8 \Rightarrow n = -5$$

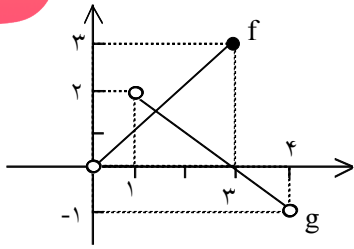
۵۴- اگر $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$ و $g(x) = \sqrt{b - x}$ باشد مقدار b را حساب کنید.

« پاسخ »

$$D_f : 36 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -6 \leq x \leq 6 \Rightarrow D_f = [-6, 6]$$

$$D_g : b - x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -b \Rightarrow x \leq b \Rightarrow D_g = (-\infty, b]$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = [-6, 6] \cap (-\infty, b] = [-6, b] \Rightarrow b = 6$$



۵۵- با توجه به نمودار f و g نمودار و ضابطه $f + g$ را بنویسید.

« پاسخ »

دامنه $f + g$:

$$D_f = (0, 3] \\ D_g = (0, 4) \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = (0, 3]$$

ضابطه $f + g$:

$$f: \begin{cases} A(0, 0) \\ B(3, 3) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{3 - 0} = 1 \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = 1(x - 0)$$

$$\Rightarrow f(x) = x$$

$$g: \begin{cases} C(0, 0) \\ D(4, -1) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 0}{4 - 0} = -1 \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 1 = -1(x - 4)$$

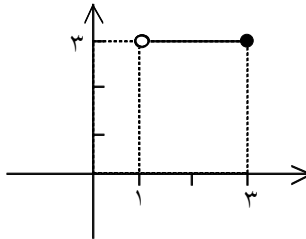
$$g(x) = -x + 3$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x - x + 3 = 3$$

نمودار $f + g$:

$$(f + g)(x) = 3$$

x	0	3
y	3	3





۵۶- اگر $f(x) = x - ۱$ و $g(x) = \sqrt{x - ۳}$ باشد، آن گاه:

الف) دامنه $\frac{f}{g}$ را به دست آورده و ضابطه آن را تشکیل دهید.
ب) مقدار $(۳f + ۴g)(۷)$ را محاسبه کنید.

« پاسخ »

الف)

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = x \geq ۳, D_{\frac{f}{g}} : D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\} = x > ۳$$

$$\sqrt{x - ۳} = ۰, x = ۳$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x - ۱}{\sqrt{x - ۳}}$$

ب)

$$(۳f + ۴g)(۷) = ۳f(۷) + ۴g(۷) = ۳(۶) + ۴(۲) = ۲۶$$

۵۷- اگر $f = \{(۱, ۲), (-۱, ۵), (-۲, ۳), (۰, -۲)\}$ و $g = \{(-۱, ۰), (۱, \sqrt{۲}), (-۲, \frac{۳}{۲}), (۴, -۶)\}$

آن گاه حاصل $\frac{f \times f}{-۳g}$ را بیابید.

« پاسخ »

$$f \times f = \{(۱, ۴), (-۱, ۲۵), (-۲, ۹), (۰, ۴)\}$$

$$-۳g = \{(-۱, ۰), (۱, -۳\sqrt{۲}), (-۲, -۴/۵), (۴, ۱۸)\}$$

$$\frac{f \times f}{-۳g} = \left\{ \left(۱, \frac{۴}{-۳\sqrt{۲}} \right), (-۲, -۲) \right\}$$



۵۸- اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \frac{1}{x-2}$ باشد:

(الف) دامنه $f \times g$ را به دست آورید.

(ب) ضابطه $f \times g$ را بنویسید.

(ج) نمودار $f \times g$ را رسم کنید.

« پاسخ »

(الف)

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{2\} \Rightarrow D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{2\}$$

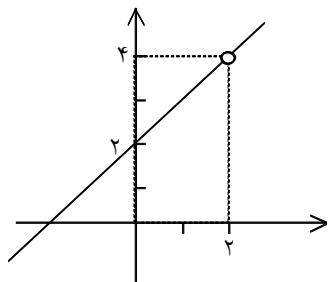
(ب)

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x^2 - 4) \times \left(\frac{1}{x-2}\right) = \frac{x^2 - 4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

(ج)

$$(f \times g)(x) = x+2$$

x	۰	۲
y	۲	۴





۵۹- اگر $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x}$ باشد:

الف) ضابطه‌ی f^{-1} را حساب کنید.

ب) دامنه $f - f^{-1}$ را بنویسید.

ج) نمودار $f - f^{-1}$ را رسم کنید.

« پاسخ »

الف)

$$f(x) = \frac{x(x-2)}{x} \Rightarrow y = x - 2 \Rightarrow y + 2 = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = x + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x + 2$$

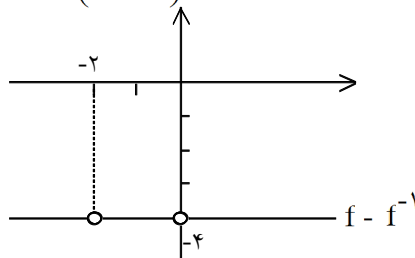
ب) تابع f در $(-2, 0)$ توخالی است. بنابراین f^{-1} در $(0, 2)$ تعریف نشده است.

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{-2\} \Rightarrow D_{f-f^{-1}} = D_f \cap D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{0, -2\}$$

ج)

$$(f - f^{-1})(x) = f(x) - f^{-1}(x) = x - 2 - (x + 2) = -4$$



۶۰- اگر $f(x) = \sqrt{x+5}$ و $g(x) = x+1$ باشد، $\left[\left(\frac{f}{g}\right)(1)\right]$ را حساب کنید. ([نماد جزء صحیح است.])

« پاسخ »

$$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$2 < \sqrt{6} < 3 \xrightarrow{\div 2} 1 < \frac{\sqrt{6}}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow \left[\frac{\sqrt{6}}{2}\right] = 1$$