

علی هاشمی

نام آزمون: روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$ کدام است؟

۲- حاصل عبارت $A = \frac{\cos^2(25^\circ + x) + \cos^2(65^\circ - x)}{\cot(25^\circ + x) \cdot \cot(x + 115^\circ)}$ کدام است؟

۳- اگر $\sin 70^\circ \simeq 0.94$ و $\cos 70^\circ \simeq 0.34$ باشد، آنگاه حاصل $\cos(200^\circ) + \tan(340^\circ)$ تقریباً کدام است؟

۴- اگر $\sin x \cdot \cos x = -\frac{1}{4}$ و $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ باشد، مقدار $\sin x + \cos x$ کدام است؟

۵- اگر انتهای کمان α در ناحیه اول باشد، عبارت $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$ برابر کدام است؟



۶- اگر $\cot \alpha = 2$ باشد، حاصل $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^3 \alpha \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$ عبارت کدام است؟

۷- به ازای کدام مقدار x تساوی $\cos\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0$ برقرار است؟

۸- محمود برای محاسبه مقدار $\cot(-12^\circ)$ به صورت زیر عمل کرده است. در کدام مرحله او مرتکب اشتباه شده است؟

$$\cot(-12^\circ) \stackrel{(1)}{=} -\cot(12^\circ) \stackrel{(2)}{=} -\cot(18^\circ - 6^\circ) \stackrel{(3)}{=} -\cot 6^\circ \stackrel{(4)}{=} -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۹- حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض $\tan 15^\circ = 0.28$ ، کدام است؟

۱۰- اگر $\tan 2^\circ = a$ ، حاصل عبارت $A = \frac{3 \sin 20^\circ + \cos 16^\circ}{5 \cos 29^\circ + 2 \sin 25^\circ}$ کدام است؟



۱۱- اگر $a = \frac{\sin 55^\circ + 2 \cos 215^\circ}{3 \sin 305^\circ - \cos 325^\circ}$ باشد، آن گاه مقدار a کدام است؟

۱۲- حاصل عبارت $A = (\sin 405^\circ) \left(\cos \frac{-7\pi}{3} \right)$ کدام است؟

۱۳- به ازای کدام یک از مقادیر زیر برای x ، رابطه $\sin x = \cos(20^\circ + x)$ برقرار است؟

۱۴- حاصل $\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ در صورت وجود کدام است؟

۱۵- حاصل عبارت $\sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{13\pi}{14} + \cos \frac{17\pi}{14}$ کدام است؟



۱۶- اگر انتهای کمان α در ربع چهارم باشد و داشته باشیم $1 - 3\sin^4 \alpha = 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ ، آنگاه مقدار $\cot\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)$ کدام است؟

۱۷- اگر $\sin(\pi + x) = \frac{1}{2} + \sin(\pi - x)$ و انتهای کمان x در ناحیه سوم باشد، حاصل $\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ کدام است؟

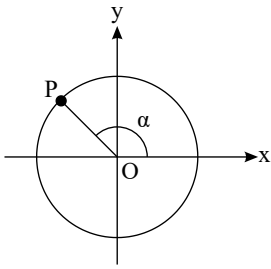
۱۸- اگر $\sin(20^\circ + \alpha) = \frac{3}{5}$ ، حاصل $\cos(\alpha - 70^\circ)$ کدام است؟

۱۹- حاصل عبارت $\frac{(\tan(60^\circ) + (\sin(585^\circ) - \cos(-510^\circ))^2) \times \cos 160^\circ}{\sin 250^\circ}$ کدام است؟

۲۰- تابع $f(x) = a + b \cos x$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ دارای بیشترین مقدار $\frac{3}{2}$ و دارای کمترین مقدار $\frac{1}{2}$ است. در این صورت $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ کدام است؟
($b > 0$)



۲۱- با توجه به شکل زیر اگر $P(-\frac{1}{3}, y)$ و طول OP برابر یک واحد باشد، حاصل $A = 3 \sin(\pi + \alpha) + 2 \tan^2 \alpha$ کدام است؟



۲۲- اگر $\cot 8^\circ = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{\cos 26^\circ - \cos 55^\circ}{\sin 8^\circ + \sin 73^\circ}$ کدام است؟

۲۳- حاصل عبارت $\frac{\sin(75^\circ) + \cos(-42^\circ)}{2 \tan(-315^\circ)}$ با مقدار کدام گزینه برابر است؟

۲۴- اگر $\sin(\pi + x) = \frac{1}{2} + \sin(\pi - x)$ و انتهای کمان x در ناحیه سوم باشد، حاصل $\cot(\frac{\pi}{2} + x)$ کدام است؟

۲۵- اگر $\cot(\pi + \alpha) > 0$ و $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) < 0$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی است؟



۲۶- حاصل عبارت $\frac{\sin \frac{5\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{3\pi}{2}}$ کدام است؟

۲۷- اگر $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ و انتهای کمان α در ناحیه دوم دایره مثلثاتی باشد، حاصل $\cot(\frac{7\pi}{2} + \alpha)$ چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

۲۸- اگر $\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta)} = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\frac{\sin(\pi - \theta) + 2 \cos(\pi + \theta)}{2 \sin(2\pi - \theta) + \cos(2\pi + \theta)}$ کدام است؟

۲۹- اگر $\cos(\frac{7\pi}{2} - x) + \sin(\frac{3\pi}{2} + x) = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\sin^3 x + \cos^3 x$ کدام است؟

۳۰- اگر $\tan \theta = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه مقدار $A = \frac{\cos \theta - 3 \sin \theta}{\cos \theta + 3 \sin \theta}$ کدام است؟ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)





پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \sin(3\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

$$\frac{\text{صورت و مخرج را بر } \cos \alpha \text{ تقسیم می‌کنیم}}{\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 5$$

۲ - گزینه ۳ برای حل سوال می‌توان از این نکته بهره برد که هرگاه دو زاویه متمم باشند ($\alpha + \beta = 90^\circ$) آنگاه $\sin \alpha$ با $\cos \beta$ برابر است:

$$(25^\circ + x) + (65^\circ - x) = 90^\circ \rightarrow \cos(65^\circ - x) = \sin(25^\circ + x)$$

اما برای ساده کردن مخرج به شکل زیر عمل می‌نماییم:

$$\cot(115^\circ + x) = \cot(90^\circ + 25^\circ + x) = -\tan(x + 25^\circ)$$

عبارت اصلی را جایگذاری می‌نماییم.

$$\frac{\cos^2(25^\circ + x) + \sin^2(25^\circ + x)}{\cot(25^\circ + x) \times (-\tan(25^\circ + x))} = \frac{1}{-1} = -1$$

۳ - گزینه ۴ برای ساده سازی باید کمان طوری بازنویسی شود که زاویه 70° در مجموعه کمان وجود داشته باشد.

$$\cos(200^\circ) + \tan(340^\circ) = \cos(270^\circ - 70^\circ) + \tan(270^\circ + 70^\circ)$$

$$= -\sin(70^\circ) - \cot(70^\circ) = -\sin(70^\circ) - \frac{\cos 70^\circ}{\sin 70^\circ}$$

$$= -0.94 - \frac{0.34}{0.96} \simeq -0.94 - 0.36 \simeq -1.3$$

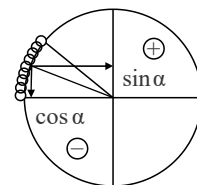
۴ - گزینه ۲ برای محاسبه مقدار عبارت مطرح شده باید با استفاده از روابط مثلثاتی و پروسه ساده سازی عبارت $\sin x \cdot \cos x$ را بسازیم:

$$A = \sin x + \cos x \xrightarrow{(\cdot)^2} A^2 = (\sin x + \cos x)^2$$

$$\xrightarrow{\sin x \cdot \cos x = -\frac{1}{2}} A^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$$

$$A^2 = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow A = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

برای تعیین علامت مثبت یا منفی به محدوده کمان توجه نمایید:



پس مقدار منفی قابل قبول است.

۵ - گزینه ۴

می‌دانیم: $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

$$\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha}$$



$$\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \xrightarrow[\text{ضرب و تقسیم می کنیم}]{\text{در مزدوج مخرج}} \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}}$$

$$= \left| \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right| = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

۶ - گزینه ۲ باتوجه به $\cot \alpha = 2$ یک رابطه بین $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ بدست می آوریم.

$$\cot \alpha = 2 \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \xrightarrow{\sin \alpha \neq 0} \cos \alpha = 2 \sin \alpha$$

حال در صورت تست، به جای تمام $\cos \alpha$ ها، مساوی آن یعنی $2 \sin \alpha$ را قرار می دهیم.

$$\frac{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha \sin \alpha}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha} = \frac{\sin^6 \alpha + (2 \sin \alpha)^6 \sin \alpha}{\sin^6 \alpha + \lambda \sin^6 \alpha} = \frac{\sin^6 \alpha + 64 \sin^7 \alpha}{\sin^6 \alpha + \lambda \sin^6 \alpha} = \frac{1 + 64 \sin \alpha}{1 + \lambda}$$

۷ - گزینه ۱

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 0 \rightarrow \alpha + \beta = \pi$$

$$\Rightarrow 3x + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} - x = \pi \rightarrow 2x = \pi - \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} \rightarrow 2x = \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = \frac{3\pi}{8}$$

۸ - گزینه ۳

$$\text{نکته: } \cot(-\alpha) = -\cot \alpha, \cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$

با استفاده از نکته بالا داریم:

$$\cot(-120^\circ) = -\cot(120^\circ) = -\cot(180^\circ - 60^\circ) = -(-\cot 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین محمود در مرحله ۳ مرتکب اشتباه شده است.

۹ - گزینه ۱ ابتدا تمام زوایا را بر حسب 15° می نویسیم:

$$\cos 285^\circ = \cos(270^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ, \sin 255^\circ = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$$

$$\sin 525^\circ = \sin(540^\circ - 15^\circ) = \sin(180^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ, \sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$\text{بنابراین داریم: } \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

صورت و مخرج را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می کنیم. در نتیجه:

$$\frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{0.28 + 1}{0.28 - 1} = \frac{1.28}{-0.72} = \frac{-128}{72} = -\frac{16}{9}$$

۱۰ - گزینه ۲ ابتدا سعی می کنیم زوایای داده شده را بر حسب 20° بنویسیم.

$$\sin 20^\circ = \sin(\pi + 20^\circ) = -\sin 20^\circ, \cos 290^\circ = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 20^\circ\right) = \sin 20^\circ$$

$$\cos 160^\circ = \cos(\pi - 20^\circ) = -\cos 20^\circ, \sin 250^\circ = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 20^\circ\right) = -\cos 20^\circ$$

$$\text{بنابراین: } A = \frac{-3 \sin 20^\circ - \cos 20^\circ}{5 \sin 20^\circ - 2 \cos 20^\circ} \xrightarrow[\text{cos } 20^\circ \text{ تقسیم می کنیم}]{\text{صورت و مخرج را بر}} \frac{-3 \tan 20^\circ - 1}{5 \tan 20^\circ - 2} = \frac{-3a - 1}{5a - 2} = \frac{3a + 1}{-5a + 2}$$

۱۱ - گزینه ۳

$$\cos 215^\circ = \cos(270^\circ - 55^\circ) = -\sin 55^\circ$$

$$\sin 305^\circ = \sin(360^\circ - 55^\circ) = -\sin 55^\circ$$

$$\cos 325^\circ = \cos(270^\circ + 55^\circ) = \sin 55^\circ$$

$$\text{پس: } \frac{\sin 55^\circ + 2 \cos 215^\circ}{3 \sin 305^\circ - \cos 325^\circ} = \frac{\sin 55^\circ - 2 \sin 55^\circ}{-3 \sin 55^\circ - \sin 55^\circ} = \frac{-\sin 55^\circ}{-4 \sin 55^\circ} = \frac{1}{4} = a$$

۱۲ - گزینه ۱ ابتدا تک تک نسبت ها را ساده می نماییم:

$$\sin(405^\circ) = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{6\pi + \pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

پس مقدار نهایی برابر است با:

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۱۳ - گزینه ۴ برای یافتن گزینه صحیح می توان با جایگذاری زاویه های مطرح شده به جواب صحیح رسید. ضمناً توجه داشته باشید هرگاه دو زاویه متمم باشند، داریم:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta, & \cos \alpha = \sin \beta \\ \tan \alpha = \cot \beta, & \cot \alpha = \tan \beta \end{cases}$$

$$x = 75^\circ \rightarrow \cos(20^\circ + 75^\circ) = \sin 75^\circ \rightarrow \cos(95^\circ) = \sin 75^\circ \quad \text{غ ق ق}$$

$$x = 90^\circ \rightarrow \cos(20^\circ + 90^\circ) = \sin(90^\circ) \rightarrow \cos(110^\circ) = \sin 90^\circ \quad \text{غ ق ق}$$

$$x = 20^\circ \rightarrow \cos(20^\circ + 20^\circ) = \sin 20^\circ \rightarrow \cos 40^\circ = \sin 20^\circ \quad \text{غ ق ق}$$

$$x = 35^\circ \rightarrow \cos(20^\circ + 35^\circ) = \sin 35^\circ \rightarrow \cos(55^\circ) = \sin 35^\circ \quad \text{متمم ها}$$

با توجه به نکته بیان شده، در گزینه چهارم دو زاویه متمم داریم، پس تساوی مذکور صحیح است.

۱۴ - گزینه ۴

راه حل اول:

$$\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}}{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} + \frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha \times \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha \times \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

راه حل دوم: ابتدا توضیح این مطلب مورد نیاز است که می توان بین $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ با $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ به شکل زیر روابطی را بیان نمود:

$$\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \quad \cos^2 \alpha = \frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}$$

با توجه به این روابط عبارت به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

توجه: می توان با انتخاب یک کمان $x = \frac{\pi}{6}$ و جایگذاری در عبارت و گزینه ها، با رد کردن گزینه های غلط، جواب صحیح را بیابیم.

۱۵ - گزینه ۳ برای حل این سؤالات باید کمان ها را طوری بازنویسی کنیم که به صورت $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ یا $k\pi \pm \alpha$ باشد.

$$\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{7\pi - 2\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

$$\cos\left(\frac{13\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{7\pi + 6\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$\cos\left(\frac{17\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{7\pi + 10\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{7}\right)$$

در این مرحله عبارات حاصل را جایگذاری می نماییم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \left(-\sin\frac{3\pi}{7}\right) + \left(-\sin\frac{5\pi}{7}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

۱۶ - گزینه ۲ ابتدا با استفاده از عبارت مطرح شده باید یکی از نسبت های مثلثاتی را محاسبه نماییم.

$$1 - 3\sin^2 \alpha = 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \rightarrow 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 3\sin^2 \alpha = 1$$

$$\rightarrow 3\sin^2 \alpha (\underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1) = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{ناحیه چهارم}} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\alpha \text{ ناحیه چهارم}} \cos \alpha = + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

در این مرحله باید عبارت مورد نظر مسئله را ساده نماییم:

$$\cot\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) = \cot\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

$$= -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = +\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۷ - گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

بنابراین:

$$\sin(\pi + x) = \frac{1}{2} + \sin(\pi - x) \Rightarrow -\sin x = \frac{1}{2} + \sin x$$

$$\Rightarrow -2\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{4}$$

حال مقدار $\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan(x) \quad (*)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \xrightarrow{\sin x = -\frac{1}{4}} \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\rightarrow \cos^2 x = \frac{15}{16} \rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{15}}{4} \xrightarrow{\text{انتهای کمان در ناحیه سوم است}} \cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

انتهای کمان در ناحیه سوم است.

$$\Rightarrow \tan x = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}} \xrightarrow{(*)} \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

۱۸ - گزینه ۱ ابتدا باید بررسی نماییم بین کمان‌ها رابطه خاصی وجود دارد یا نه. بدین منظور اول از خاصیت $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ استفاده می‌نماییم.

$$\cos(\alpha - 70^\circ) = \cos(70^\circ - \alpha)$$

حال مجموع کمان‌ها برابر 90° می‌باشد، یعنی کمان‌ها متمم یکدیگر هستند پس داریم:

$$\cos(70^\circ - \alpha) = \sin(\alpha + 20^\circ) = \frac{3}{5}$$

۱۹ - گزینه ۴

$$\tan 60^\circ = \tan(36^\circ + 24^\circ) = \tan 24^\circ = \tan(18^\circ + 6^\circ) = \tan 6^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sin 585^\circ = \sin(360^\circ + 225^\circ) = \sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(-510^\circ) = \cos 510^\circ = \cos(360^\circ + 150^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 160^\circ = \cos(180^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$$

$$\sin 250^\circ = \sin(270^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$$



$$\rightarrow \frac{(\tan(60^\circ) + (\sin(585^\circ) - \cos(-510^\circ))^2) \times \cos 160^\circ}{\sin 250^\circ}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + (-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})^2) \times (-\cos 20^\circ)}{(-\cos 20^\circ)}$$

$$= \sqrt{3} + (\frac{2}{4} - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{3}{4}) = \sqrt{3} + \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{5 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}}{4}$$

۲۰ - گزینه ۳

$$\pi \leq x \leq 2\pi \rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{b>0} -b \leq b \cos x \leq b$$

$$\rightarrow a - b \leq a + b \cos x \leq a + b \rightarrow \begin{cases} a - b = \frac{1}{2} \\ a + b = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow a = 1, b = \frac{1}{2}$$

$$\text{پس: } f(x) = 1 + \frac{1}{2} \cos x \rightarrow f(\frac{5\pi}{3}) = 1 + \frac{1}{2} \cos \frac{5\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} (\pi - \frac{\pi}{3}) = 1 + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

۲۱ - گزینه ۲

$$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow (-\frac{1}{3})^2 + y^2 = 1^2 \rightarrow y^2 = \frac{8}{9} \rightarrow y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\rightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} \rightarrow \tan \alpha = -2\sqrt{2}$$

$$\rightarrow A = 2 \sin(\pi + \alpha) + 2 \tan^2 \alpha = 2(-\sin \alpha) + 2 \tan^2 \alpha = 2(-\frac{2\sqrt{2}}{3}) + 2(-2\sqrt{2})^2$$

$$\rightarrow A = -2\sqrt{2} + 2(8) \rightarrow A = 16 - 2\sqrt{2}$$

۲۲ - گزینه ۲

$$\cos 260^\circ = \cos(180^\circ + 80^\circ) = -\cos 80^\circ$$

$$\cos 550^\circ = \cos(360^\circ + 190^\circ) = \cos 190^\circ = \cos(270^\circ - 80^\circ) = -\sin 80^\circ$$

$$\sin 730^\circ = \sin(2 \times 360^\circ + 10^\circ) = \sin 10^\circ = \sin(90^\circ - 80^\circ) = \cos 80^\circ$$

$$\text{پس: } A = \frac{-\cos 80^\circ - (-\sin 80^\circ)}{\sin 80^\circ + \cos 80^\circ} = \frac{\frac{-\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ} + \frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ}}{\frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ} + \frac{\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ}} = \frac{-\cot 80^\circ + 1}{1 + \cot 80^\circ} = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

۲۳ - گزینه ۴

$$\sin 750^\circ = \sin(2 \times 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos(-420^\circ) = \cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan(-315^\circ) = -\tan(315^\circ) = -\tan(360^\circ - 45^\circ) = -(-\tan 45^\circ) = 1$$

$$\text{پس: } \frac{\sin 750^\circ + \cos(-420^\circ)}{2 \tan(-315^\circ)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2(1)} = \frac{1}{2}$$



$$\sin 15^\circ = \sin(18^\circ - 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2} \checkmark$$

۲۴ - گزینه ۲

$$\sin(\pi + x) = \frac{1}{2} + \sin(\pi - x) \rightarrow -\sin x = \frac{1}{2} + \sin x \rightarrow -\frac{1}{2} = 2 \sin x$$

$$\rightarrow \sin x = -\frac{1}{4} \text{ و } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

۲۵ - گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha > 0 &\rightarrow \alpha \text{ در ربع اول یا سوم} \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha < 0 &\rightarrow \cos \alpha > 0 \rightarrow \alpha \text{ در ربع اول یا چهارم} \end{aligned} \right\} \rightarrow \alpha \text{ در ربع اول}$$

۲۶ - گزینه ۱

$$\begin{aligned} \sin \frac{5\pi}{6} &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \tan \frac{\pi}{4} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1 \\ \rightarrow \frac{\sin \frac{5\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{3\pi}{2}} &= \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} + (-1)} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3 \end{aligned}$$

۲۷ - گزینه ۱

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ و } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{3}$$

(α در ربع دوم است.)

$$\cot\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) = \cot\left(2\pi + \frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$= -\tan \alpha = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

۲۸ - گزینه ۳

$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{-\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{2} \rightarrow \cot \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin(\pi - \theta) + 2 \cos(\pi + \theta)}{2 \sin(2\pi - \theta) + \cos(2\pi + \theta)} = \frac{\sin \theta - 2 \cos \theta}{-2 \sin \theta + \cos \theta} = \frac{\frac{\sin \theta}{\sin \theta} - \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta}}{\frac{-2 \sin \theta}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{1 - 2 \cot \theta}{-2 + \cot \theta}$$

$$= \frac{1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)}{-2 + \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{-\frac{5}{2}} = -\frac{4}{5}$$

۲۹ - گزینه ۴

$$\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{2}{3}$$



$$\rightarrow \cos\left(2\pi + \frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow -\sin x - \cos x = \frac{2}{3} \rightarrow \sin x + \cos x = -\frac{2}{3}$$

می‌دانیم که $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ است بنابراین نیاز به پیدا کردن $\sin x \cdot \cos x$ داریم. برای این کار عبارت آخر به دست آمده را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(\sin x + \cos x)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + 2 \sin x \cos x = \frac{4}{9}$$

$$\rightarrow 2 \sin x \cos x = -\frac{5}{9} \rightarrow \sin x \cos x = -\frac{5}{18}$$

$$\text{پس: } \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x)$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 3\left(-\frac{5}{18}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27} - \frac{15}{27} = -\frac{23}{27}$$

۳۰ - گزینه ۲

$$A = \frac{\cos \theta - 3 \sin \theta}{\cos \theta + 3 \sin \theta} = \frac{\frac{\cos \theta}{\cos \theta} - \frac{3 \sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\cos \theta}{\cos \theta} + \frac{3 \sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{1 - 3 \tan \theta}{1 + 3 \tan \theta} = \frac{1 - 3\left(\frac{1}{2}\right)}{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{1}{5}$$



پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۶ - ۲	۱۱ - ۳	۱۶ - ۲	۲۱ - ۲	۲۶ - ۱
۲ - ۳	۷ - ۱	۱۲ - ۱	۱۷ - ۲	۲۲ - ۲	۲۷ - ۱
۳ - ۴	۸ - ۳	۱۳ - ۴	۱۸ - ۱	۲۳ - ۴	۲۸ - ۳
۴ - ۲	۹ - ۱	۱۴ - ۴	۱۹ - ۴	۲۴ - ۲	۲۹ - ۴
۵ - ۴	۱۰ - ۲	۱۵ - ۳	۲۰ - ۳	۲۵ - ۱	۳۰ - ۲