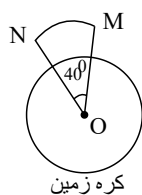


علی هاشمی

نام آزمون: واحدهای اندازه گیری زاویه

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۱ - مطابق شکل، ماهواره‌ای در فاصله ۸۰۰ کیلومتری از سطح زمین در حال گردش روی یک مسیر دایره‌ای است. اگر این ماهواره از نقطه M به نقطه N برسد، چند کیلومتر مسافت طی کرده است؟ (شعاع کره زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر در نظر بگیرید.)

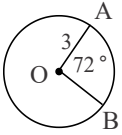
۲ - چه مدت زمان طول می‌کشد تا عقربه دقیقه‌شمار ساعت، به اندازه $\frac{8\pi}{3}$ رادیان دوران می‌کند؟

۳ - ماهواره‌ای روی مداری دایره‌ای شکل در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در هر شبانه‌روز یک دور مسیر دایره‌ای را طی می‌کند. زاویه‌ای که این ماهواره نسبت به مرکز مسیر دایره‌ای در مدت ۵ ساعت طی می‌کند، تقریباً چند رادیان است؟ ($\pi = 3.14$)

۴ - مجموع دو زاویه 72° و تفاضل آن دو زاویه $\frac{\pi}{15}$ رادیان می‌باشد. اگر اندازه زاویه بزرگتر برابر x درجه باشد، زاویه $(5x - 10^\circ)$ به طور تقریبی روی دایره مثلثاتی کدام است؟



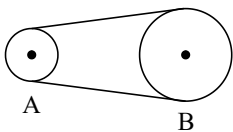
۵- در شکل زیر طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ 72° درجه کدام است؟ (O مرکز دایره است.)



۶- در مثلثی اندازهٔ یک زاویه 30° درجه و تفاضل دو زاویهٔ دیگر برحسب رادیان $\frac{\pi}{10}$ است. اندازهٔ زاویهٔ بزرگتر چند رادیان است؟

۷- اگر $1 - \cos \alpha = \frac{5}{3}$ و $\tan \alpha \cdot \cos \alpha > 0$ باشد، آنگاه کمان α در کدام ربع دایرهٔ مثلثاتی است؟

۸- در شکل زیر چرخ‌دنده‌های A و B توسط نواری لاستیکی به هم وصل شده‌اند. شعاع چرخ‌دندهٔ A ، 20 سانتی متر و شعاع چرخ‌دندهٔ B برابر 1 متر است. اگر چرخ‌دندهٔ B به اندازهٔ $\frac{3\pi}{2}$ رادیان بچرخد، چرخ‌دندهٔ A چند دور می‌زند؟



۹- تقریباً چند ساعت طول می‌کشد تا عقربهٔ ساعت‌شمار به اندازهٔ $1,57$ رادیان دوران کند؟ ($\pi \approx 3,14$)



۱۰ - متمم و مکمل زاویه 20° برحسب رادیان، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱۱ - طول مسیری که نوک برف پاک کنی به طول $\frac{3}{\pi}$ متر پس از طی زاویه مرکزی 40° طی می کند، تقریباً چند سانتی متر است؟

۱۲ - چندتا از عبارت های زیر درست است؟

الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی الساقین ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعده این مثلث بزرگ تر از اندازه هر ساق آن است.

ب) اگر دو زاویه از مثلثی $\frac{\pi}{5}$ و $\frac{2\pi}{5}$ رادیان باشند، اندازه زاویه سوم 72° درجه است.

پ) انتهای کمان $\frac{5\pi}{6}$ در ربع دوم دایره مثلثاتی است.

ت) $\frac{\pi}{2} -$ رادیان برابر $9^\circ -$ درجه است.

۱۳ - اندازه یک زاویه برحسب رادیان برابر با $\frac{20\pi}{3}$ است. اندازه این زاویه برحسب درجه کدام است؟

۱۴ - دایره ای به شعاع 20 سانتی متر مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمان به طول 2π سانتی متر از این دایره، چند رادیان است؟

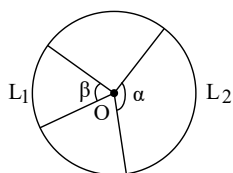


۱۵ - مکمل زاویه $\frac{5\pi}{12}$ رادیان چند درجه است؟

۱۶ - مجموع دو زاویه برحسب درجه ۱۲۰ و اختلاف آن‌ها برحسب رادیان $\frac{\pi}{3}$ است. زاویه کوچک‌تر چند برابر زاویه بزرگ‌تر است؟

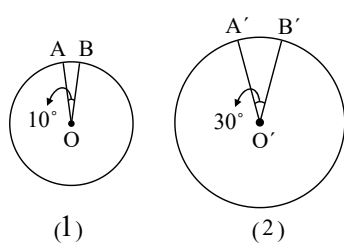
۱۷ - اگر در شکل زیر حاصل ضرب طول کمان‌های L_1 و L_2 برابر $\frac{\pi}{9}$ مساحت دایره باشد و $\alpha = 4\beta$ ، آنگاه مثلثی با دو زاویه α و β از کدام نوع است؟

(O مرکز دایره است.)

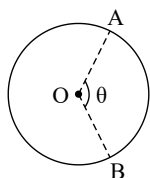


۱۸ - اگر $\alpha = \beta - \gamma$ ، $\beta = 60^\circ$ و $\gamma = -3\pi$ رادیان باشند، آنگاه انتهای کمان زاویه α در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

۱۹ - انتهای کمان‌های ۳ و $\frac{4}{5}$ رادیان به ترتیب در کدام نواحی قرار دارند؟

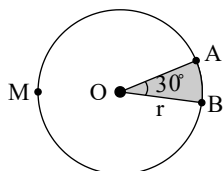


۲۰- مطابق شکل، اگر مساحت دایره (۲) سه برابر مساحت دایره (۱) باشد، حاصل $\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}}$ کدام است؟

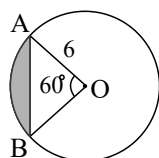


۲۱- در شکل زیر، اگر شعاع دایره ۴ cm و طول کمان AB برابر ۱۲ cm باشد، θ چند درجه است؟

۲۲- چه مدت بر حسب دقیقه طول می کشد تا در یک ساعت عقربه ای، عقربه دقیقه شمار به اندازه 2.5π رادیان دوران کند؟



۲۳- در شکل مقابل، محیط ناحیه هاشورخورده $\pi + 12$ است. در این صورت طول کمان $\widehat{AMB}$ کدام است؟



۲۴- در شکل زیر محیط قسمت هاشورخورده کدام است؟



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ برای محاسبه مسافت طی شده، باید در قدم اول زاویه برحسب rad باشد.

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{40^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{9}$$

برای محاسبه طول کمان پس از تبدیل واحد زاویه به رادیان می توان از فرمول زیر استفاده کرد:

$$\text{شعاع چرخش} = 6400 + 800 = 7200 \text{ km}$$

$$\ell = R \cdot \theta = 7200 \times \frac{2\pi}{9} = 1600\pi$$

۲ - گزینه ۳ با گذشت هر ۶۰ دقیقه، عقربه دقیقه شمار، 36° دوران می کند، بنابراین:

$$\frac{36^\circ}{60} = 6^\circ \text{ زاویه طی شده در هر دقیقه}$$

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \Rightarrow \frac{\frac{8\pi}{3}}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \Rightarrow D = \frac{180^\circ \times 8}{3} = 480^\circ$$

یعنی عقربه دقیقه شمار، 480° دوران می کند و هر 6° معادل یک دقیقه است، بنابراین:

$$\frac{480^\circ}{6^\circ} = 80 \text{ دقیقه}$$

یعنی ۸۰ دقیقه طول می کشد تا عقربه دقیقه شمار، $\frac{8\pi}{3}$ رادیان دوران کند، مدت زمانی معادل یک ساعت و ۲۰ دقیقه.

۳ - گزینه ۳ می دانیم هر شبانه روز ۲۴ ساعت است:

$$\frac{36^\circ}{24} = 1.5^\circ \text{ زاویه طی شده در هر ساعت}$$

$$1.5^\circ \times 5 = 7.5^\circ \text{ زاویه طی شده در ۵ ساعت}$$

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{7.5^\circ}{180^\circ}$$

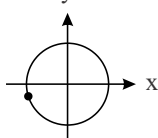
$$\Rightarrow R = \frac{7.5\pi}{180} \xrightarrow{\pi=3.14} R = \frac{7.5 \times 3.14}{180} \simeq 1.3$$

۴ - گزینه ۲

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{D}{180^\circ}$$

$$\Rightarrow D = \frac{180^\circ}{180^\circ} = 1^\circ \Rightarrow \begin{cases} x + y = 72^\circ \\ x - y = 1^\circ \end{cases} \Rightarrow 2x = 73^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 36.5^\circ \\ y = 35.5^\circ \end{cases} \Rightarrow (5x - 10^\circ) = 200^\circ$$



۵ - گزینه ۴

$$\frac{72^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{72^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{221}{5}$$

اگر L طول کمان، r شعاع دایره و α برحسب رادیان باشد، آنگاه:

$$\alpha = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{2\pi}{5} = \frac{L}{3} \Rightarrow L = \frac{6\pi}{5}$$

۶ - گزینه ۱

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{30^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{6}$$

مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه یا π رادیان است، پس:

$$x + y = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$



۷ - گزینه ۲ راهحل اول:

$$x - y = \frac{\pi}{10} \quad \text{تفاضل دو زاویه دیگر}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{6} \\ x - y = \frac{\pi}{10} \end{cases} \Rightarrow 2x = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{10} = \frac{25\pi + 3\pi}{30} = \frac{28\pi}{30} \Rightarrow x = \frac{14\pi}{30} = \frac{7\pi}{15}$$

۷ - گزینه ۲ راهحل اول:

$$1 - \cos \alpha = \frac{5}{3} \Rightarrow 1 - \frac{5}{3} = \cos \alpha$$

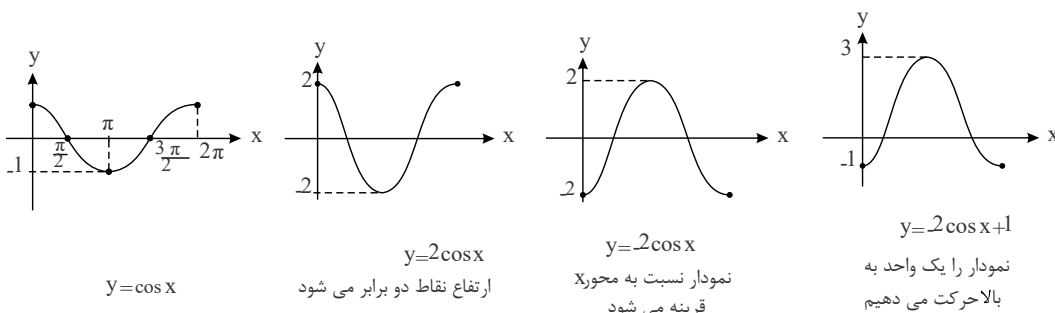
$$\Rightarrow -\frac{2}{3} = \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \text{ در ناحیه ۲ یا ۳}$$

$$\tan \alpha \cdot \cos \alpha > 0 \Rightarrow \tan \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \text{ در ناحیه ۲ یا ۴}$$

ناحیه ۲ = اشتراک نواحی

راهحل دوم:

برای رسم ابتدا نمودار $y = \cos x$ را رسم می‌نماییم.



۸ - گزینه ۳ برای فهم بهتر، چرخ‌دنده‌ها را مانند چرخ‌های عقب و جلوی یک وسیله نقلیه در نظر بگیرید. مسیری که هر دو چرخ طی می‌نمایند یکسان است یعنی طول کمان که هر دو چرخ‌دنده طی می‌نمایند برابر است. پس داریم:

$$l_A = l_B \Rightarrow R_A \cdot \theta_A = R_B \theta_B$$

$$\Rightarrow \theta_A = \frac{R_B \theta_B}{R_A} = \frac{100 \times \frac{3\pi}{2}}{20} = \frac{15\pi}{2} = 7,5\pi = 3,75(2\pi)$$

↓
یک دور کامل

۹ - گزینه ۱ برای محاسبه می‌توان از یک نسبت تناسب ساده بهره برد. برای دوران عقربه ساعت شمار به اندازه π رادیان ۶ ساعت زمان مورد نیاز است، پس:

$$\frac{6 \text{ ساعت}}{t} = \frac{3,14 \text{ رادیان}}{1,57} \rightarrow t = \frac{6 \times 1,57}{3,14} = 3 \text{ ساعت}$$

۱۰ - گزینه ۴ ابتدا متمم و مکمل 20° را محاسبه می‌نماییم:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \text{ متمم} \rightarrow 20^\circ + \beta = 90^\circ \rightarrow \beta = 70^\circ$$

$$\alpha + \gamma = 180^\circ \text{ مکمل} \rightarrow 20^\circ + \gamma = 180^\circ \rightarrow \gamma = 160^\circ$$

در این مرحله هر دو زاویه را بر حسب rad می‌نویسیم:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{70^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{7\pi}{18} \text{ متمم}$$

$$\frac{160^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{16\pi}{18} = \frac{8\pi}{9} \text{ مکمل}$$

۱۱ - گزینه ۲ ابتدا زاویه 40° را بر حسب رادیان می‌نویسیم:

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{40^\circ}{180^\circ} \Rightarrow R = \frac{2}{9}\pi$$

مسیری که برف پاک‌کن طی می‌کند به صورت قسمتی از یک کمان با شعاعی به طول برف پاک‌کن است. طول کمان را به دست می‌آوریم:

$$\theta = \frac{2\pi}{9}$$

$$L = r\theta \rightarrow L = \frac{2}{3}m \Rightarrow L \sim 67cm$$

$r = \frac{2}{\pi}$

۱۲ - گزینه ۳ به بررسی عبارتهای داده شده می‌پردازیم:

(الف) یک رادیان تقریباً برابر با 57° است، پس دو زاویه دیگر بزرگ‌تر از 57° خواهند بود، پس قاعده کوچکتر از ساق‌ها است.

$$(ب) \text{ درست است. زیرا } \frac{2\pi}{5} = 72^\circ \text{ و } \frac{\pi}{5} = 36^\circ$$

$$180^\circ - (72^\circ + 36^\circ) = 72^\circ = \text{اندازه زاویه سوم بر حسب درجه}$$

(پ) درست است.



ت) درست است.

۱۳ - گزینه ۲ اندازه زاویه برحسب رادیان را فرض می کنیم. لذا اندازه این زاویه برحسب درجه $\alpha \times \frac{180^\circ}{\pi}$ خواهد بود.

$$\Rightarrow D = \frac{2\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 20 \times 60^\circ = 1200^\circ$$

۱۴ - گزینه ۲ نکته: در دایره ای به شعاع R ، طول کمان روبه روی زاویه مرکزی θ رادیان، برابر $L = R\theta$ است. با توجه به نکته بالا می توان نوشت:

$$L = R\theta \Rightarrow 2\pi = 20\theta \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$$

۱۵ - گزینه ۲

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{5\pi}{12}}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{5}{12} \rightarrow \boxed{D = 75^\circ}$$

α را مکمل زاویه $\frac{5\pi}{12}$ در نظر می گیریم؛ داریم:

$$\rightarrow \alpha + 75^\circ = 180^\circ \rightarrow \boxed{\alpha = 105^\circ}$$

۱۶ - گزینه ۲

$$\frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{D}{180^\circ} \rightarrow D = 60^\circ$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y = 120^\circ \\ x - y = 60^\circ \end{cases} \rightarrow 2x = 180^\circ \rightarrow x = 90^\circ, y = 30^\circ \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{3}$$

۱۷ - گزینه ۱

$$\begin{cases} L_1 = R\beta \\ L_r = R\alpha \\ \alpha = 4\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L_1 = R\beta \\ L_r = 4R\beta \end{cases}$$

$$L_1 \times L_r = \frac{\pi}{9} \times \pi R^2 \rightarrow R\beta \times 4R\beta = \frac{\pi^2 R^2}{9} \rightarrow 4\beta^2 = \frac{\pi^2}{9}$$

$$\rightarrow 2\beta = \frac{\pi}{3} \rightarrow \beta = \frac{\pi}{6} \rightarrow \beta = 30^\circ \text{ و } \alpha = 4\beta \xrightarrow{\beta=30^\circ} \alpha = 120^\circ$$

مثلث متساوی الساقین $\alpha = \beta \rightarrow \gamma = 30^\circ \rightarrow \gamma = 30^\circ \rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \rightarrow \gamma = 30^\circ$ زاویه سوم مثلث

پس مثلث متساوی الساقین است و زاویه قائمه ندارد.

۱۸ - گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} \beta &= 60^\circ \\ \gamma &= -3\pi = -3 \times 180^\circ = -540^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \alpha = \beta - \gamma \rightarrow \alpha = 60^\circ - (-540^\circ) = 1140^\circ$$

$$\alpha = (3 \times 360^\circ) + 60^\circ = 60^\circ$$

بنابراین α در ربع اول قرار دارد.

۱۹ - گزینه ۲

$$\rightarrow \begin{cases} \text{ناحیه دوم} \quad 3 \approx 3 \times 57.3^\circ \approx 171.9^\circ \\ \text{ناحیه سوم} \quad 4.5 \approx 4.5 \times 57.3^\circ \approx 257.85^\circ \end{cases}$$

۲۰ - گزینه ۲

مساحت و شعاع دایره (۲) را به ترتیب با S' و R' و مساحت و شعاع دایره (۱) را به ترتیب با S و R نمایش می دهیم، داریم:

$$\text{فرض سؤال: } \frac{S'}{S} = 3 \rightarrow \frac{\pi R'^2}{\pi R^2} = 3 \rightarrow \frac{R'}{R} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}} = \frac{R'(\frac{\pi}{6})}{R(\frac{\pi}{18})} = \frac{R'}{R} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$$

۲۱ - گزینه ۲

$$\widehat{AB} = r \cdot \theta \rightarrow 12 = 4\theta \rightarrow \theta = 3 \text{ رادیان}$$



$$\frac{3}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \rightarrow D = \frac{540^\circ}{\pi}$$

۲۲ - گزینه ۳ عقربه دقیقه شمار هر ۶۰ دقیقه یک دور دایره یا 2π رادیان را طی می کند، پس داریم:

$$\frac{2.5\pi}{2\pi} = \frac{x}{60} \rightarrow x = \frac{60 \times 2.5}{2} \rightarrow x = 75 \text{ دقیقه}$$

۲۳ - گزینه ۴

$$\widehat{AB} = r\alpha = r \times \frac{\pi}{6} = \frac{r\pi}{6}$$

$$\text{محیط ناحیه هاشور خورده} = 2r + \frac{r\pi}{6} = 12 + \pi \rightarrow r\left(2 + \frac{\pi}{6}\right) = 6\left(2 + \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow r = 6$$

$$\rightarrow \widehat{AMB} = r \times \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 6 \times \frac{11\pi}{6} \rightarrow \widehat{AMB} = 11\pi$$

۲۴ - گزینه ۲

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{60^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{\pi}{3} \text{ رادیان} \rightarrow \widehat{AB} = \frac{\pi}{3} \times 6 = 2\pi$$

$$\triangle OAB = \text{متساوی الاضلاع} \rightarrow AB = 6 \rightarrow \text{محیط هاشور خورده} = 6 + 2\pi$$



پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۵ - ۴	۹ - ۱	۱۳ - ۲	۱۷ - ۱	۲۱ - ۲
۲ - ۳	۶ - ۱	۱۰ - ۴	۱۴ - ۲	۱۸ - ۱	۲۲ - ۳
۳ - ۳	۷ - ۲	۱۱ - ۲	۱۵ - ۲	۱۹ - ۲	۲۳ - ۴
۴ - ۲	۸ - ۳	۱۲ - ۳	۱۶ - ۲	۲۰ - ۲	۲۴ - ۲