



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: جمع‌بندی تشریحی تابع یازدهم تجربی

عسلان و ریاضیات تجربی
ریاضی (۳)
ریاضی (۱)
Alireza_Feizian
علیرضا فیضیان

۱ دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x+3} - \sqrt{2x+1}}$$

۲ اگر $f(x) = \sqrt{[x] - 1}$ و $g = \{(-2, 0)(5, 3)(0, 7)(2, 8)\}$ باشد در این صورت $\frac{2f-3g}{g}$ را به دست آورید.

۳ اگر $D_f = [2, 5]$ و $D_g = [4, 12]$ آنگاه دامنه‌ی $f(\frac{x}{2}) + g(2x)$ را بدست آورید.

۴ a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x \geq 1 \\ 2x + 3 & x < 1 \end{cases}$ یک به یک باشد.

۵ معکوس پذیری تابع زیر را بررسی کنید و در صورت امکان تابع معکوس تابع را بیابید.

$$\begin{cases} f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 - 2x + 5 \end{cases}$$

۶ به ازای کدام مقدار k ، $f(x) = \begin{cases} kx + 2 & x \geq 2 \\ x^3 & x \leq 2 \end{cases}$ ضابطه‌ی یک تابع است؟

۷ دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x+1| - 4}}$$

۸ دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \sqrt{|x+1| + x - 3}$$

۹ اگر دو تابع $f(x) = x + 4$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & x \neq 4 \\ k - 1 & x = 4 \end{cases}$ مساوی باشند k را به دست آورید.

۱۰ اگر $f = \{(-2, -1)(-1, 0)(0, 2)(-3, 3)\}$ و $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ باشد دامنه‌ی تابع $f + g$ و تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

۱۱ a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر یک به یک باشد.

$$f = \{(1, 4)(2, a+3)(b^2 - 3, 4)(2, b+1)(3, a+b)\}$$

۱۲ نمودار تابع $y = [\frac{1}{3}x]$ را در بازه $[-6, 6]$ رسم کنید.

۱۳ آیا توابع f, g با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{(x+2)^2(x-3)}$ ، $g(x) = |x+2|\sqrt{x-3}$ با هم مساویند؟ چرا؟

۱۴ معکوس پذیری $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x^3 - 1}}$ را تحقیق کنید و در صورت معکوس پذیری ضابطه‌ی تابع معکوس را بیابید.

۱۵ نمودار تابع $f(x) = [2x]$ را در بازه‌ی $[0, 1]$ رسم کنید.

۱۶ نمودار تابع $y = 2x - [x]$ را در بازه $[-1, 1]$ رسم کنید.

۱۷ اگر $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$ باشد، $f^{-1}(x)$ را بیابید. تحت کدام شرایط برای a و b و c داریم $f = f^{-1}$ ؟

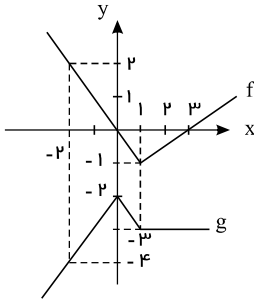
۱۸ دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}$$

۱۹ نمودار تابع $f(x) = [\frac{1}{3}x + 1]$ را در بازه‌ی $[-2, 2]$ رسم کنید.



علیرضا فیضیان



۲۰ نمودار توابع f و g به صورت مقابل است، حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $(f+g)(0)$

ب) $(2f-g^2)(-2)$

ج) $(\frac{f-3}{g})(3)$

د) $(\frac{3f-g}{g+4f})(1)$

۲۱ توابع $f(x) = \begin{cases} 5x-7 & x \geq 1 \\ -x-1 & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x-2 & x \geq -2 \\ -1 & x < -2 \end{cases}$ مفروضند. حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $(f+g)(-4)$ ب) $(f-2g)(3)$ ج) $(\frac{f+3}{g})(0)$ د) $(f \times g - 5)(\frac{1}{3})$

۲۲ اگر $f = \{(-4, 13), (-1, 7), (0, 5), (\frac{5}{3}, 0), (3, -5)\}$ و $g = \{(-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0), (5, 2), (9, 6)\}$ توابع $f-g, f+g$ را به دست آورید.



mydars

اپلیکیشن آموزشی مای درس

پاسخنامه تشریحی

۱

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x+3} - \sqrt{2x+1}} \rightarrow (I) \ x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \text{ و } (II) \ 2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

$$(III) \ \sqrt{x+3} - \sqrt{2x+1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+3} \geq \sqrt{2x+1} \Rightarrow 2 \text{ توان} \Rightarrow x+3 \geq 2x+1 \Rightarrow x \leq 2$$

$$(I) \cap (II) \cap (III) \Rightarrow D_f = \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$$

$$D_f = [x] \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \text{ و } D_g = \{-2, 5, 0, 2\}$$

$$D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \{5, 2\}$$

$$\frac{2f-3g}{g} = \left\{ \left(2, \frac{2-24}{1} \right) \left(5, \frac{4-9}{3} \right) \right\} = \left\{ \left(2, \frac{-11}{1} \right) \left(5, \frac{-5}{3} \right) \right\}$$

۲

$$D_f = [2, 5]$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{2} \leq 5 \Rightarrow 4 \leq x \leq 10$$

$$D_g = [4, 12]$$

$$g(2x) \Rightarrow 4 \leq 2x \leq 12 \Rightarrow 2 \leq x \leq 6$$

$$D_{f\left(\frac{x}{2}\right)} \cap D_{g(2x)} = [4, 6]$$

۳

۴

برای یک به یک بودن باید همه ی ضابطه ها یک به یک باشند و سپس اشتراک بردهای آنها تهی باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x \geq 1 \rightarrow x^2 + a \text{ یک به یک} \checkmark \\ 2x + 3 & x < 1 \rightarrow 2x + 3 \text{ یک به یک} \checkmark \end{cases}$$

$$R_1 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x^2 + a \geq 1 + a \Rightarrow y \geq 1 + a$$

$$R_2 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow 2x + 3 < 5 \Rightarrow y < 5$$

$$R_1 \cap R_2 = \emptyset \Rightarrow 1 + a \geq 5 \Rightarrow a \geq 4$$

۵

$$\begin{cases} f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x-1)^2 + 4 \Rightarrow (x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-1)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow y \geq 4 \end{cases}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 - 1)^2 + 4 = (x_2 - 1)^2 + 4$$

$$\Rightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \xrightarrow{x \geq 1} |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \xrightarrow{x \geq 1} x_1 - 1 = x_2 - 1 \rightarrow x_1 = x_2$$

پس یک به یک است و تابع معکوس دارد.

$$y = (x-1)^2 + 4$$

$$y - 4 = (x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{y-4} = |x-1|$$

$$\xrightarrow{x \geq 1} x = \sqrt{y-4} + 1 \xrightarrow{x=y} y = \sqrt{x-4} + 1$$

$$\begin{cases} f^{-1}: [4, +\infty) \rightarrow [1, +\infty) \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x-4} + 1 \end{cases}$$

۶

هر دو ضابطه در $x = 2$ مشترک هستند بنابراین باید مقادیرشان در این نقطه برابر باشد.





در هر دو ضابطه باید یک مقدار بدهد. $f(2) \Rightarrow$

$$k(2) + 2 = (2)^3 \Rightarrow 2k + 2 = 8 \Rightarrow k = 3$$

۷

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x+1|} - 4} \quad \text{باید زیر رادیکال مثبت باشد.}$$

$$|x+1| - 4 > 0 \Rightarrow |x+1| > 4 \Rightarrow x+1 < -4 \text{ یا } x+1 > 4 \\ \Rightarrow x < -5 \text{ یا } x > 3 \Rightarrow D_f = (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$$

۸

$$f(x) = \sqrt{|x+1| + x - 3}$$

$$|x+1| + x - 3 \geq 0$$

$$x \geq -1 \rightarrow x+1+x-3 \geq 0 \rightarrow 2x \geq 2 \rightarrow x \geq 1$$

$$x < -1 \rightarrow -x-1+x-3 \geq 0 \rightarrow -4 \geq 0 \rightarrow \emptyset$$

$$D_f = [1, +\infty)$$

۹

چون مساویند پس دامنه ی هر دو تابع برابر است و باید مقادیرشان در همه ی نقاط برابر باشد بنابراین:

$$f(4) = g(4) \Rightarrow 4 + 4 = 8 = g(4)$$

$$g(4) = k - 1 = 8 \Rightarrow k = 9$$

۱۰

$$D_f = \{-2, -1, 0, -3\} \text{ و } D_g = 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g \Rightarrow D_{f+g} = \{-2, -1, 0\}$$

$$\frac{f}{fg} = ? \quad D_{\frac{f}{fg}} = (D_f \cap D_g) - \{g = 0\} \text{ و } D_f = \{-3, -2, -1, 0\} \text{ و } D_g = -2 \leq x \leq 2$$

$$\sqrt{4 - x^2} = 0 \Rightarrow \text{توان } 2 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$D_{\frac{f}{fg}} = \{-1, 0\} \rightarrow \frac{f}{fg} = \{(-1, 0)(0, \frac{2}{2 \times 2} = \frac{1}{2})\} = \{(-1, 0), (0, \frac{1}{2})\}$$

۱۱

شرط یک به یک بودن زوج مرتب این است که مؤلفه ی دوم برابر نداشته باشد و در صورت برابری مؤلفه ی دوم باید مؤلفه ی اول هم برابر باشند.

$$(2, b+1), (2, a+3) \Rightarrow \text{چون تابع است} \Rightarrow b+1 = a+3 \Rightarrow b = a+2$$

$$(1, 4), (b^2 - 3, 4) \Rightarrow \text{چون یک به یک است} \Rightarrow b^2 - 3 = 1 \Rightarrow b = \pm 2$$

$$b = a + 2 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \Rightarrow a = 0 \\ b = -2 \Rightarrow a = -4 \end{cases}$$

۱۲

$$y = \left[\frac{1}{3}x \right] \quad x \in [-6, 6] \Rightarrow \frac{1}{3}x \in [-2, 2]$$

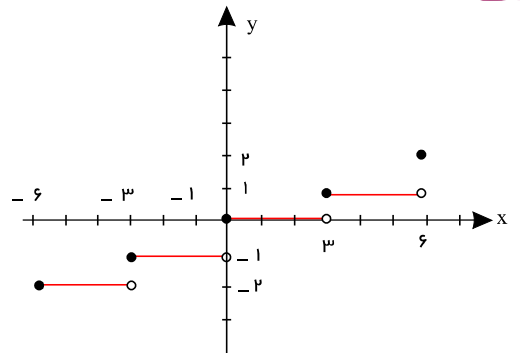
$$-2 \leq \frac{1}{3}x < -1 \Rightarrow -6 \leq x < -3 \Rightarrow y = -2$$

$$-1 \leq \frac{1}{3}x < 0 \Rightarrow -3 \leq x < 0 \Rightarrow y = -1$$

$$0 \leq \frac{1}{3}x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 3 \Rightarrow y = 0$$

$$1 \leq \frac{1}{3}x < 2 \Rightarrow 3 \leq x < 6 \Rightarrow y = 1$$

$$\frac{1}{3}x = 2 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 2$$





۱۳

$$\left. \begin{aligned} (x+2)^r(x-3) &\geq 0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ (x-3) &\geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f = [3, +\infty) \cup \{-2\}$$

$$D_f \neq D_g \Rightarrow f(x) \neq g(x)$$

۱۴ تابعی معکوس پذیر است که یک به یک باشد.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{1 - \sqrt{x_1^r - 1}} = \sqrt{1 - \sqrt{x_2^r - 1}}$$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{x_1^r - 1} = 1 - \sqrt{x_2^r - 1} \Rightarrow x_1^r - 1 = x_2^r - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

تابع یک به یک است پس وارون پذیر است.

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x^r - 1}} = y \Rightarrow 1 - \sqrt{x^r - 1} = y^r$$

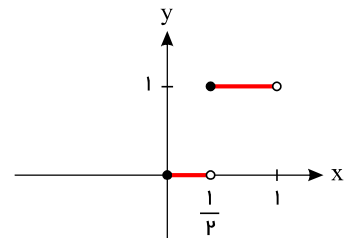
$$\Rightarrow 1 - y^r = \sqrt{x^r - 1} \Rightarrow x^r - 1 = (1 - y^r)^r \Rightarrow x = \sqrt[r]{(1 - y^r)^r + 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[r]{(1 - x^r)^r + 1}$$

۱۵

$$f(x) = [2x] \quad 0 \leq x < 1 \rightarrow 0 \leq 2x < 2$$

$$0 \leq 2x < 1 \rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2} \rightarrow y = 0$$

$$1 \leq 2x < 2 \rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1 \rightarrow y = 1$$

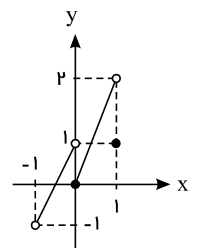


۱۶

$$-1 < x < 0 \rightarrow y = 2x - (-1) = 2x + 1 \quad \left| \begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right|$$

$$0 \leq x < 1 \rightarrow y = 2x - 0 = 2x \quad \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right|$$

$$x = 1 \rightarrow y = 2 - 1 = 1$$



۱۷

$$f(x) = \frac{ax+b}{x+d} \Rightarrow y = \frac{ax+b}{x+d} \Rightarrow xy+yd = ax+b$$

$$\Rightarrow xy - ax = b - yd \Rightarrow x(y-a) = b - yd \Rightarrow x = \frac{b-yd}{y-a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{b-dx}{x-a}$$

$$\Rightarrow y = \frac{b-dx}{x-a} = \frac{ax+b}{x+d} \Rightarrow a = -d \Rightarrow a+d = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}$$

$$(I) 2+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$(II) 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

$$(III) \sqrt{2+x} - \sqrt{2-x} \neq 0 \Rightarrow 2+x \neq 2-x \Rightarrow 2x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$(I) \cap (II) \cap (III) \Rightarrow D_f = [-2, 2] - \{0\}$$

۱۸

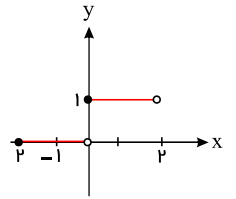


۱۹

$$f(x) = \left\lfloor \frac{1}{2}x + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2}x \right\rfloor + 1$$

$$-2 \leq x < 0 \rightarrow -1 \leq \frac{1}{2}x < 0 \rightarrow \left\lfloor \frac{1}{2}x \right\rfloor = -1 \rightarrow f(x) = 0$$

$$0 \leq x < 2 \rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}x < 1 \rightarrow \left\lfloor \frac{1}{2}x \right\rfloor = 0 \rightarrow f(x) = 0 + 1 = 1$$



۲۰

الف) $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + (-2) = -2$

ب) $(2f - g^2)(-2) = 2f(-2) - g^2(-2) = 2 \times 2 - (-4)^2 = 4 - 16 = -12$

ج) $\left(\frac{f-3}{g}\right)(3) = \frac{f(3)-3}{g(3)} = \frac{0-3}{-3} = 1$

د) $\left(\frac{3f-g}{g+4f}\right)(1) = \frac{3f(1)-g(1)}{g(1)+4f(1)} = \frac{3(-1)-(-3)}{-3+4(-1)} = \frac{-3+3}{-7} = 0$

الف) $(f + g)(-4) = f(-4) + g(-4) = 4 - 1 + (-1) = 2$

ب) $(f - 2g)(3) = f(3) - 2g(3) = 15 - 7 - 2\left(-\frac{3}{2} - 2\right) = 8 + 3 + 4 = 15$

ج) $\left(\frac{f+3}{g}\right)(0) = \frac{f(0)+3}{g(0)} = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$

د) $(f \times g - 5)\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot g\left(\frac{1}{3}\right) - 5 = \left(-\frac{1}{3} - 1\right)\left(-\frac{1}{6} - 2\right) - 5$
 $= \left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{13}{6}\right) - 5 = \frac{26}{9} - 5 = \frac{-19}{9}$

۲۲

$$f = \left\{ (-4, 13), (-1, 7), (0, 5), \left(\frac{5}{2}, 0\right), (3, -5) \right\}, D_f = \left\{ -4, -1, 0, \frac{5}{2}, 3 \right\}$$

$$g = \left\{ (-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0), (5, 2), (9, 6) \right\}, D_g = \left\{ -4, -2, 0, 3, 5, 9 \right\}$$

$$D_f \cap D_g = \left\{ -4, 0, 3 \right\}$$

$$f + g = \left\{ (-4, 13 + (-7)), (0, 5 + (-3)), (3, -5 + 0) \right\} = \left\{ (-4, 6), (0, 2), (3, -5) \right\}$$

$$f - g = \left\{ (-4, 13 - (-7)), (0, 5 - (-3)), (3, -5 - 0) \right\} = \left\{ (-4, 20), (0, 8), (3, -5) \right\}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(-4, \frac{13}{-7}\right), \left(0, \frac{5}{-3}\right), \left(3, \frac{-5}{0}\right) \right\} = \left\{ \left(-4, -\frac{13}{7}\right), \left(0, -\frac{5}{3}\right) \right\}$$

تعریف نشده