mydars
اپلیکیشن آموزشی مای درس

آمار و احتمال

پایه ی یازدهم « رشته ی ریاضی فیزیک »

فصل ۱ : آشنایی با مبانی ریاضیات

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.ir

@amerimath

mydars
اپلیکیشن آموزشی مای درس

درس اوّل : آشنایی با منطق ریاضی

منطق ریاضی که عده ای آن را منطق نمادین نیز می گویند، دستور زبان ریاضی، یا مطالعه‌ی ساختار جمله هایی است که در ریاضی بکار برده می شود. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلال ها می پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می کند. در این درس با مفاهیم اولیه‌ی منطق ریاضی آشنا می شویم.

گزاره :

هر جمله‌ی خبری که درست یا نادرست باشد را **گزاره** می نامند. درستی یا نادرستی هر گزاره را ارزش گزاره گویند. اگر گزاره ای درست است، گویند ارزش این گزاره «درست» است و اگر گزاره ای نادرست باشد، گویند ارزش آن« نادرست» است. همچنین هر گزاره تنها دارای یکی از دو ارزش درست یا نادرست می باشد.

مثال : هر یک از جملات زیر گزاره هستند.

۱ : عدد $\sqrt{۲}$ یک عدد گنگ است.

۲ : توان دوّم یک عدد همیشه از آن بزرگتر است.

۳ : مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه نیست.

۴ : بین هر دو عدد طبیعی متوالی، عدد طبیعی دیگری وجود ندارد.

که گزاره های ۱ و ۴ درست و گزاره های ۲ و ۳ نادرست می باشند.

مثال : هر یک از جملات زیر ، چون خبری نیستند، گزاره محسوب نمی شوند.

۱ : آیا عدد π یک عدد گویا است؟

۲ : معادله‌ی $x^۲+۳x-۱۰=۰$ را حل کن.

۳ : نامساوی مثلثی ، چه نامساوی مفیدی است!

توجه :

الف: چون گزاره باید، دقیقاً یکی از دو ارزش درست[1] (صدق) یا نادرست[2] (کذب) داشته باشد، لذا برای صحبت از صدق و کذب آن باید بار معنایی داشته باشد. در اینجا در مورد گزاره بودن یا نبودن جملات خبری

---

[1] . True
[2] . False

mydars
اپلیکیشن آموزشی مای درس

بدون بار معنایی صحبت نمی کنیم. برای مثال جمله‌های خبری زیر به دلیل نداشتن بار معنایی در مورد گزاره بودن یا نبودن آن صحبت نمی کنیم.

۱ : درخت یک عدد زوج است. ۲ : مربع بر مستطیل بخش پذیر است.

ب : جمله های خبری که نتوانیم ارزش آنها را تعیین کنیم، گزاره نیستند، برای مثال درستی یا نادرستی دو جمله‌ی نسبی است و گزاره محسوب نمی شوند.

۱ : درس هندسه از درس حسابان آسان تر است. ۲ : سیب قرمز از سیب زرد خوش مزه تر است.

ج : درستی یا نادرستی برخی گزاره ها ممکن است در حال حاضر مشخص نباشد و در آینده ارزش آنها معلوم می شود. برای مثال ارزش گزاره‌ی« آخرین پنجشنبه‌ی مهر هوا آلوده است.» روز پنجشنبه‌ی آخر مهر معلوم می شود.

د : یک گزاره نمی تواند هم درست و هم نادرست باشد و همچنین نمی تواند نه درست و نه نادرست باشد. لذا دقیقاً باید فقط یکی از این دو ارزش را داشته باشد. گر چه گاهی تعیین درستی یا نادرستی آن برای شخص مشکل باشد. برای مثال جمله‌ی خبری « صدمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر ۵ است.» گزاره است و دقیقاً یکی از ارزش درست یا نادرست را دارد.

هـ : لزومی ندارد که گزاره ها با یک زبان رسمی (مثلاً زبان فارسی) نوشته شوند. گاهی اوقات یک گزاره با نماد های ریاضی نوشته می شود.

مثال : هر یک از جملات زیر گزاره هستند.

۱ : $\sqrt{۲} \in (۱,۲)$ ۲ : $\sqrt{۳} > ۲$ ۳ : $\frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$ ۴ : $(۲+۳)\times ۴ = ۲۵$

که گزاره های ۱ و ۳ درست و گزاره های ۲ و ۴ نادرست می باشند.

و : در منطق ریاضی مرسوم است که گزاره ها را با یک حرف کوچک الفبای لاتین مانند p ، q ، r و .... نامگذاری می کنند. این کار زمانی اهمیت پیدا می کند که همزمان با چند گزاره سروکار داشته باشیم.

برای مثال می نویسند:

$$p : ۲+۳>۴$$

یا اینکه q : عدد ۵۳ بر ۹ بخش پذیر است.

mydars
اپلیکیشن آموزشی مای درس

تمرین ۱ : از بین جملات زیر، گزاره ها را مشخص کنید و ارزش آنها را در صورت امکان تعیین کنید.

۱ : ایران یک کشور آسیایی است.

۲ : در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید، برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

۳ : ای کاش می توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم.

۴ : آیا ۲ + ۳ برابر ۵ است؟

۵ : هر عدد فرد بزرگتر از ۵ را می توان به صورت مجموع سه عدد اوّل نوشت.

۶ : هر معادله‌ی درجه‌ی دوّم دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

۷ : پنجمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر ۹ است.

***

نقیض گزاره : اگر ضمن حفظ موضوعیت و ارتباط، یک گزاره چنان تغییر کند که ارزش آن تغییر کند، گویند **نقیض گزاره** نوشته شده است. نقیض یک گزاره‌ی درست ، گزاره ای نادرست و نقیض یک گزاره‌ی نادرست، گزاره ای درست می باشد. در واقع ارزش نقیض یک گزاره دقیقاً مخالف آن گزاره است.

تمرین ۲ : ارزش گزاره‌ی زیر را بنویسید و سپس گزاره‌ی نقیض آن را بنویسید.

« عدد $\sqrt{۵}$ عددی گنگ است. »

حل : این گزاره درست است و هر یک از گزاره های زیر نقیض آن محسوب می شوند.

الف : « عدد $\sqrt{۵}$ عددی گنگ نیست. »

ب : « عدد $\sqrt{۵}$ عددی گویا است. »

ج : « چنین نیست که عدد $\sqrt{۵}$ عددی گنگ باشد. »

توجه : نقیض گزاره‌ی p را به صورت $\sim p$ نمایش می دهند.

$\sim p$	p
ن	د
د	ن

mydars
اپلیکیشن آموزشی های درس

تمرین برای حل :

۳ : نقیض هر یک از گزاره های زیر را بنویسید.

الف : مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه نیست.

ب : دو قطر لوزی بر هم عمودند.

۴ : نقیض نقیض گزاره‌ی زیر را بنویسید. سپس ارزش آن را تعیین کنید.

عدد ۵ عدد اوّل است.

***

گزاره های هم ارز

اگر دو گزاره‌ی p و q هم ارزش باشند، گوییم این دو گزاره هم ارز (معادل) هستند و می نویسیم:

$$p \equiv q$$

برای مثال همانطور که حدس می زنید، نقیض نقیض هر گزاره با خود آن گزاره هم ارز است. لذا

$$p \equiv \sim(\sim p)$$

به جدول زیر نیز توجه کنید، که مؤید این موضوع نیز می باشد.

$\sim(\sim p)$	$\sim p$	p
د	ن	د
ن	د	ن

***

جدول ارزش گزاره ها

هر گزاره دارای دو حالت ارزشی« درست یا نادرست» است. امّا وقتی دو یا چند گزاره با هم در نظر گرفته شوند، تعداد حالت های ارزشی آنها بیشتر می شوند. به جداول زیر توجه کنید.

الف : تعداد حالت های ارزشی یک گزاره

p
د
ن

ب : تعداد حالت های ارزشی دو گزاره

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

ج : تعداد حالت های ارزشی سه گزاره

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

تمرین ۵ : تعیین کنید که جدول ارزشی چهار گزاره چند حالت دارد؟ چرا؟

تمرین ۶ : ثابت کنید، جدول ارزشی n گزاره دارای ۲^n حالت است.

***

گزاره های مرکب : هر گزاره می تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره‌ی ساده نیز مـی گوینـد. ممکن است گزاره ای بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از دو یا چند گزاره‌ی ساده باشد، چنـین گـزاره هایی را گزاره‌ی مرکب می گویند.

برای مثال گزاره‌ی زیر یک گزاره‌ی مرکب است.

« عدد ۵ اوّل است و عدد ۷ مرکب است.»

همانطور که معلوم است این گزاره از دو گزاره‌ی ساده تشکیل شده است که با حرف رابط « و » به هم متصل شده اند. گزاره‌ی اوّل درست ولی گزاره‌ی دوّم نادرست می باشد. کل گزاره نیز نادرست محسوب می شود.

mydars
اپلیکیشن آموزشی های درس

در واقع از ترکیب گزاره ها با رابط های گزاره ای، موسوم به ادات ربط مانند، « و ، یا ، اگر ... آنگاه ، اگر و تنها اگر و غیره » انجام می گیرد و ارزش گزاره‌ی مرکب نیز با توجه به نوع ترکیب آنها بستگی به گزاره های ساده‌ی تشکیل دهنده‌ی آن است. در این جا گزاره ها به چهار صورت ترکیب می کنیم.

الف : ترکیب عطفی دو گزاره : ترکیب دو گزاره با حرف ربط « و» را **ترکیب عطفی** می نامند.

مثال : « عدد ۱۵ مرکب است و عدد $\sqrt{۵}$ گنگ است.»

اگر q و p دو گزاره‌ی ساده باشند، ترکیب عطفی آنها به صورت $p \wedge q$ نمایش می دهند و می خوانند p و q. ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که هر دو گزاره‌ی تشکیل دهنده‌ی آن درست باشند. به جدول زیر توجه کنید.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

مثال : گزاره‌ی مرکب « عدد ۱۵ مرکب است و عدد $\sqrt{۵}$ گنگ است.» درست است زیرا هر دو گزاره‌ی تشکیل دهنده آن یعنی « عدد ۱۵ مرکب است.» و « عدد $\sqrt{۵}$ گنگ است.» هر دو درست می باشند.

مثال : گزاره‌ی مرکب « عدد ۱۵مربع کامل است و عدد $\sqrt{۵}$ گنگ است.» نادرست است. زیرا گزاره‌ی« عدد ۱۵مربع کامل است.» نادرست و گزاره‌ی « عدد $\sqrt{۵}$ گنگ است.» درست است.

تمرین۷ : درستی یا نادرستی گزاره های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف : شهریور ششمین ماه سال است و شهریور ۳۱ روز است.

ب : ۲ عددی زوج است و عدد π گویا است.

ج : $۳ \leq ۴$ و $\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}$

د : بغداد پایتخت کویت است و تهران پایتخت ایران است.

هـ: ابوالوفای بوزجانی ریاضی دان آلمانی نیست و گاوس ریاضی دان ایرانی است.

mydars
اپلیکیشن آموزشی مای درس

تمرین ۸ : جاهای خالی جدول زیر با توجه به ارزش گزاره ها را با یک گزاره‌ی ساده کامل کنید.

ردیف	گزاره	ارزش گزاره
۱	هفته هفت روز دارد و	T
۲	قرآن دارای ۳۰ جزء است و	F
۳	خیام پزشک ایرانی است و	F
۴	.... و عدد ۱۹۱۷ عددی اوّل است.	F

ب : ترکیب فصلی دو گزاره : ترکیب دو گزاره با حرف ربط « یا » را **ترکیب فصلی** می نامند.

مثال : « عدد ۱۵ فرد است یا عدد ۱۲ مضرب۳ است.»

اگر q و p دو گزاره‌ی ساده باشند، ترکیب فصلی آنها به صورت $p \vee q$ نمایش می دهند و می خوانند p یا q. ترکیب فصلی دو گزاره وقتی درست است که حداقل یکی از دو گزاره‌ی تشکیل دهنده‌ی آن درست باشند. به جدول زیر توجه کنید.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال : گزاره‌ی مرکب « عدد ۱۵ فرد است یا عدد۱۲ مضرب۳ است.» درست است. زیرا هر دو گزاره‌ی تشکیل دهنده آن یعنی « عدد ۱۵ فرد است.» و « عدد ۱۲مضرب ۳ است.» هر دو درست می باشند.

مثال : گزاره‌ی مرکب « عدد ۱۲مضرب ۳ است یا عدد ۱۲مضرب ۷ است.» درست است. زیرا یکی از گزاره های تشکیل دهنده‌ی آن «یعنی عدد ۱۲ مضرب ۳ است.» درست می باشد.

مثال : گزاره‌ی مرکب « عدد ۱۲مضرب ۷ است یا عدد ۱۲مضرب ۵ است.» نادرست است. زیرا هر دو گزاره ی تشکیل دهنده‌ی آن نادرست می باشند.

mydars
اپلیکیشن آموزشی های درس

تمرین۹ : درستی یا نادرستی گزاره های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف : دوّمین عدد اوّل ۳ است یا ۲۳ عدد زوج است.

ب : ۲ عددی زوج است یا π عدد گنگ است.

ج : $\sqrt{۲} \in Z$ یا $۴ \leq ۳$

تمرین ۱۰ : جاهای خالی جدول زیر با توجه به ارزش گزاره ها را با یک گزاره‌ی ساده کامل کنید.

ردیف	گزاره	ارزش گزاره
۱	هفته هفت روز دارد یا	T
۲	خورشید دور زمین می چرخد یا	F
۳	زکریای رازی کاشف الکل است یا	T
۴	.... یا عدد ۱۷عددی اوّل نیست.	F

ج : ترکیب شرطی دو گزاره : ترکیب دو گزاره با حرف ربط « اگر .... آنگاه .... » را **ترکیب شرطی** می نامند.

مثال : « اگر $۵ > ۳$ آنگاه $\frac{۱}{۵} > \frac{۱}{۳}$ است.»

اگر p و q دو گزاره‌ی ساده باشند، ترکیب شرطی آنها به صورت $p \Rightarrow q$ نمایش می دهند و به یکی از صورت های زیر می خوانند :

- اگر p آنگاه q
- p شرط کافی برای q است.
- p نتیجه می دهد q را
- q شرط لازم برای p است.
- q از p نتیجه می شود.

در ترکیب شرطی دو گزاره به صورت $p \Rightarrow q$، گزاره‌ی p را مقدم (فرض) و گزاره‌ی q را تالی(حکم) می نامند. ترکیب شرطی دو گزاره وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد. به جدول زیر توجه کنید.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

mydars
اپلیکیشن آموزشی مای درس

مثال : گزاره‌ی مرکب « اگر عدد ۱۵ فرد است آنگاه عدد ۱۲ مضرب۳ است.» درست است. زیرا هم مقـدم و هم تالی درست می باشند.

مثال : گزاره‌ی مرکب « اگر عدد ۱۲مضرب ۳ است آنگاه عدد ۱۲مضرب ۷ است.» نادرست است. زیرا مقدم درست ولی تالی نادرست می باشد.

تمرین ۱۱ : درستی یا نادرستی گزاره های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف : اگر عدد ۴ فرد باشد آنگاه ۴ مربع کامل نیست.

ب : اگر ۱۲ عددی زوج است آنگاه π عدد گنگ است.

ج : اگر $\sqrt{۵} \in Z$ آنگاه $۴ \geq ۵$

د : اگر ایران یک کشور آسیایی است آنگاه ژاپن همسایه‌ی شرقی آن است.

تمرین ۱۲ : جاهای خالی جدول زیر با توجه به ارزش گزاره ها را با یک گزاره‌ی ساده کامل کنید.

ردیف	گزاره	ارزش گزاره
۱	اگر .... آنگاه	T
۲	اگر .... آنگاه	F
۳	اگر .... آنگاه ۹۹ عددی اوّل است.	F
۴	اگر..................... آنگاه $۸ + ۵^۲$ عددی اوّل باشد.	F

توجه : همانطور که متوجه شدید، در یک ترکیب شرطی دو گزاره اگر مقدم نادرست باشد، تالی هـر ارزشـی داشته باشد، گزاره‌ی مرکب درست است. این حالت را در اصطلاح **انتفای مقدم** می نامند. برای مثال گزاره-ی مرکب زیر بنا به انتفای مقدم همواره درست است، گرچه ما از ارزش تالی آن خبر نداریم.

اگر ۲ عددی فرد باشد، آنگاه ....

د : ترکیب دو شرطی دو گزاره : ترکیب دو گزاره با حروف ربط « اگر .... آنگاه ..... و برعکس» یا « .... اگر و فقط اگر ..... » یا « .... شرط لازم و کافی است برای ...... » را **ترکیب دوشرطی** می نامند

مثال : « اگر $۵ > ۳$ آنگاه $\frac{۱}{۵} < \frac{۱}{۳}$ است و برعکس»

مثال : « یک مثلث قائم الزاویه است اگر و تنها اگر زاویه‌ی قائمة داشته باشد. »

مثال : « شرط لازم و کافی برای زوج بودن یک عدد طبیعی آن است که بر ۲ بخش پذیر باشد. »

mydars
اپلیکیشن آموزشی درس

اگر q و p دو گزاره‌ی ساده باشند، ترکیب دوشرطی آنها به صورت $p \Leftrightarrow q$ نمایش می دهند و به یکی از صورت های زیر می خوانند :

- اگر p آنگاه q و برعکس
- p اگر و تنها اگر q
- p شرط لازم و کافی است برای q

ترکیب دوشرطی دو گزاره وقتی درست است که هر دو گزاره‌ی تشکیل دهنده‌ی آن درست یا هر دو نادرست باشند. به جدول زیر توجه کنید.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

مثال : گزاره‌ی مرکب « اگر عدد ۱۵ فرد است آنگاه عدد ۱۲ مضرب ۷ است و برعکس» نادرست است. زیرا یکی از گزاره های تشکیل دهنده‌ی آن درست و دیگری نادرست است.

تمرین۱۳ : درستی یا نادرستی گزاره های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف : اگر عدد ۴ فرد باشد آنگاه ۴ مربع کامل است و برعکس.

ب : $\sqrt{۲}$ عددی گویا است اگر و تنها اگر π عدد گویا باشد.

ج : شرط لازم و کافی برای اینکه ۵ عددی فرد باشد، آن است بر۲ بخش پذیر نباشد.

تمرین۱۴ : جاهای خالی جدول زیر با توجه به ارزش گزاره ها را با یک گزاره‌ی ساده کامل کنید.

ردیف	گزاره	ارزش گزاره
۱	.... اگر و تنها اگر ۱۱۹ عددی مرکب باشد.	T
۲	اگر .... آنگاه .... و برعکس.	F
۳	اگر .... آنگاه ۲ مربع کامل است و برعکس	F
۴	اگر........................ آنگاه $۸+۵^۲$ عددی مرکب است و برعکس	F

تمرین ۱۵ : جدول ارزشی گزاره‌ی مرکب مقابل را تشکیل دهید. $\sim q \vee p$

mydars
اپلیکیشن آموزشی مای درس

توجه : در تشکیل یک جدول ارزشی ستون های زیر به ترتیب لازم است.
الف : گزاره های ساده
ب: نقیض گزاره های ساده (درصورت لزوم)
ج: ترکیب های درون پرانتزی
د: نقیض گزاره های درون پرانتزی (درصورت لزوم)
هـ: ترکیب های برون پرانتزی

حل : تعداد گزاره ها ۲ تا می باشند. لذا جدول دارای ۴ حالت می باشد.

p	q	$\sim q$	$\sim q \vee p$
د	د	ن	د
د	ن	د	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د

تمرین ۱۶: جدول ارزشی گزاره‌ی مرکب مقابل را تشکیل دهید. $(\sim q \wedge p) \Rightarrow q$

تمرین ۱۷ : جدول ارزشی برای گزاره‌ی مرکب زیر تشکیل دهید.

$$(p \wedge q) \Rightarrow (\sim q \vee p)$$

حل : تعداد گزاره ها ۲ تا می باشند. لذا جدول دارای ۴ حالت می باشد.

p	q	$p \wedge q$	$\sim q$	$\sim q \vee p$	$(p \wedge q) \Rightarrow (\sim q \vee p)$
د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	د	د	د
ن	د	ن	ن	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د

تمرین ۱۸ : جدول ارزشی گزاره‌ی مرکب مقابل را تشکیل دهید. $(\sim q \wedge \sim p) \vee r$

تمرین ۱۹ : با تشکیل جدول ارزشی ثابت کنید که :

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

حل : تعداد گزاره ها ۲ تا می باشند. لذا جدول دارای ۴ حالت می باشد.

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	ن
ن	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د

لذا :

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

mydars
اپلیکیشن آموزشی های درس

تمرین ۲۰ : اگر p گزاره ای درست و q گزاره ای نادرست و r گزاره ای دلخواه باشد. مانند نمونه‌ی حل شده و بدون تشکیل جدول، ارزش هر یک از گزاره های مرکب زیر را تعیین کنید.

۱) $(p \vee q) \vee r$

۲) $(p \vee q) \wedge (\sim q)$

۳) $(p \Rightarrow q) \wedge r$

۴) $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$

۵) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

۶) $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

۷) $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$

۸) $(q \Rightarrow p) \wedge r$

حل ۱ :

$$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \vee q) \equiv T \rightarrow (p \vee q) \vee r \equiv T$$

تمرین برای حل :

۲۱ : درستی یا نادرستی گزاره های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف : $۱ + ۱۰^{۲}$ عددی اوّل است یا $۲۸ = !۴$

ب : همه‌ی اعداد اوّل فرد هستند و همه‌ی اعداد زوج مرکب هستند.

پ : اگر ۲ تنها عدد زوج و اوّل باشد، آنگاه $۱۰ = \binom{۵}{۲}$

ت: اگر $۵ = \sqrt{۱۶}$، آنگاه $۳ = ۲ + ۱$

ث : اگر ۱۵ زوج باشدآنگاه ۱۶ فرد است و برعکس

ج : اگر ۵ عددی اوّل و ۱۲ فرد باشد، آنگاه ۱۵ مربع کامل نمی باشد.

۲۲ : با تشکیل جدول ارزشی هم ارزی زیر را ثابت کنید.

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

۲۳ : با تشکیل جدول ارزشی ثابت کنید که گزاره های زیر همیشه درست می باشند.

الف) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

ب) $p \Rightarrow (p \vee q)$

ج) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

د) $[\sim q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \sim p$

۲۴ : با تشکیل جدول ارزشی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

ب) $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

ج) $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

د) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

هـ) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

و) $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

ز) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

ح) $p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$

توجه :

۱: برخی گزاره های مرکب نظیر $p \Rightarrow p$ یا $p \vee \sim p$ همیشه درست و برخی دیگر نظیر $p \wedge \sim p$ همیشه نادرست می باشند. در این صورت می نویسند:

$$(p \vee \sim p) \equiv T$$

$$(p \Rightarrow p) \equiv T$$

$$(p \wedge \sim p) \equiv F$$

۲: برای هر دو گزاره‌ی q و p همواره داریم.

الف) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

ب) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

این دو هم ارزی منطقی را قوانین دمورگان می نامند.

۳: برای هر دو گزاره‌ی q و p همواره داریم.

الف) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

ب) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

این دو هم ارزی منطقی را قوانین جذب می نامند.

۴: اگر p و q و r سه گزاره‌ی دلخواه باشند، قوانین نیز را می توان برای این گزاره ها بیان کرد.

الف) قوانین جا به جایی(تعویض پذیری)

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

ب) قوانین شرکت پذیری (انجمنی)

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

mydars
اپلیکیشن آموزشی های درس

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

ج) قوانین توزیع پذیری (پخشی)

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

در زیر یکی از قوانین اثبات شده است. اثبات دیگر قوانین را فراگیران محترم واگذار می کنیم.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

۵: گزاره‌ی $q \Rightarrow p$ عکس ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ نامیده می شود. همچنین گـزاره‌ی $\sim q \Rightarrow \sim p$ را عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ گفته می شود. همانطور که در تمرین های قبل مشاهده کردید:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

***

هم ارزی های اساسی گزاره های مرکب

همانطور که تاکنون مشاهده کردید، هم ارزی های بین گزاره های مرکب متعدد اند. در این قسمت بـه چنـد مورد مهم آنها اشاره می کنیم.

۱) $\sim(\sim p) \equiv p$

۲) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

۳) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

۴) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

۵) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

۶) $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

۷) $p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$

۸) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

۹) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

۱۰) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

mydars
اپلیکیشن آموزش های درس

۶: به کمک هم ارزی های اساسی و بدون تشکیل جدول، می توان برخی دیگر از هم ارزی های گزاره ای را ثابت کرد.

مثال : بدون تشکیل جدول هم ارزی ثابت کنید که

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

حل :

$$p \Rightarrow q \equiv \sim (\sim (p \Rightarrow q)) \equiv \sim (p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q$$

تمرین ۲۵ : بدون تشکیل جدول هم ارزی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\sim (p \vee (\sim q)) \equiv \sim (q \Rightarrow p)$

ب) $\sim (p \Rightarrow (\sim q)) \equiv p \wedge q$

ج) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

د) $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

تمرین ۲۶ : بدون تشکیل جدول هم ارزی، ارزش گزاره‌ی مرکب زیر را تعیین کنید.

$$\sim ((p \Rightarrow q) \vee \sim q)$$

۷: هر ترکیب دو شرطی همیشه درست از دو گزاره، با معادل بودن آنها یکی است. پس اگر دو گزاره‌ی p و q معادل باشند، ارزش $p \Leftrightarrow q$ درست است و اگر $p \Leftrightarrow q$ درست باشد، دو گزاره‌ی تشکیل دهنده‌ی آن یعنی p و q معادل هستند. همچنین اگر دو گزاره‌ی p و q معادل نباشند، در این صورت $p \Leftrightarrow q$ درست نیست.

تمرین ۲۷ : ارزش هر یک از گزاره های دو شرطی زیر درست است. جای خالی را در هر مورد کامل کنید.

الف) اگر .... ، آنگاه برف سیاه است و برعکس

ب) اگر π عددی گنگ باشد، آنگاه .... و برعکس

تمرین ۲۸ : گزاره‌ی دو شرطی زیر نادرست است. جای خالی را در هر مورد کامل کنید.

اگر .... ، آنگاه .... و برعکس

mydars
اپلیکیشن آموزش‌های درس

۸ : قواعد و قوانین مربوط به جبر گزاره ها، مبانی اوّلیه استدلال هستند. این قواعد و قوانین برای استدلال در کلیه‌ی شاخه های ریاضیات مورد استفاده قرار می گیرند. بـرای مثـال هـم ارزی $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ نشان می دهد که اگر بخواهیم از گزاره‌ی p گزاره‌ی q را نتیجه بگیریم، می توان به جای آن (و شـاید بـه جهت سهولت کار) نقیض p را از نقیض q نتیجه بگیریم. به مثال زیر توجه کنید:

مثال : ثابت کنید که اگر $a \in Z$ و $a^{۲}$ عددی فرد باشد،آنگاه a عددی فرد است.

اثبات: برای سادگی به جای اثبات این حکم، معادل آن یعنی عکس نقیض آن را ثابت می کنیم. عکس نقیض این گزاره به صورت زیر است.

اگر $a \in Z$ و a عددی زوج باشد، آنگاه $a^{۲}$ عددی زوج است.

در فرض جدید (فرض خلف) عدد صحیح a زوج در نظر گرفته شده است. لـذا وجـود دارد عـدد صـحیح k بطوری که :

$$a = ۲k$$

در نتیجه :

$$a^{۲} = (۲k)^{۲} = ۴k^{۲} = ۲k'$$

یعنی $a^{۲}$ عددی زوج است.

تمرین۲۹ : ثابت کنید که هرگاه n عددی صحیح و $n^{۲}$ مضرب ۳ باشد، آنگاه n نیز مضرب ۳ است.

***

گزاره نما : گاهی اوقات یک جمله‌ی خبری مانند نمونه های زیر شامل یک یا چند متغیر است و به ازاء قرار دادن مقادیر مختلف به جای متغیر آن تبدیل به یک گزاره می‌شود، چنین جملاتی را گزاره نما می نامند. در واقع بدون قرار دادن مقدار به جای متغیر نمی توان در مورد درستی یا نادرستی گزاره نما قضاوت کرد.

مثال :

الف : x یک عدد اوّل است.

ب : فلانی امروز غایب است.

ج : فلان برادر بهمان است.

د : $x+y=۵$

هـ : $\frac{x+y}{۲}\geq\sqrt{xy}$

مجموعه‌ی تمام اعضایی که به جای متغیر گزاره نما جایگزین شوند و گزاره نما را به یک گزاره تبدیل کنند، را دامنه‌ی متغیر گزاره نما می نامند.

زیر مجموعه‌ای از دامنه‌ی متغیر که اگر اعضای آنرا به جای متغیر گزاره نما جایگزین کنیم گزاره نما را به یک گزاره‌ی درست تبدیل کند را مجموعه‌ی جواب گزاره نما می نامند.

مثال : جمله‌ی خبری $\sqrt{x}\geq ۳$ یک گزاره نما است.

دامنه‌ی متغیر این گزاره نما $D=\{x\,|\,x\in R\,,x\geq ۰\}$ ولی مجموعه‌ی جواب این گزاره نما مجموعه‌ی $S=\{x\,|\,x\in R\,,x\geq ۹\}$ می باشد. توجه داشته باشیم که برای هر گزاره نما داریم: $S\subseteq D$

تمرین ۳۰ : دامنه‌ی متغیر گزاره نما های زیر داده شده است. مجموعه‌ی جواب هر یک را مشخص کنید.

الف) x مضرب ۷ است. $(D=Z)$

ب) $۱۵x^۲-۷x-۸=۰$ $(D=R)$

ج) تاس را پرتاب می کنیم و $P(x)=\frac{۱}{۶}$ $(D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\})$

تمرین ۳۱ : دامنه‌ی متغیر هر یک از گزاره نماهای زیر، مجموعه‌ای اعداد صحیح است. مجموعه‌ی جواب هر یک را بنویسید.

الف) x مربع کامل است.

ب) a یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است.

ج) $\frac{۲x+۱}{۳}\leq -۱$

د) $\{n(n+۱)=۰\,|\,n\in W\}$

mydars
اپلیکیشن آموزشی های درس

مشابه نقیض گزاره ، برای گزاره نما هم می توان نقیض نوشت. به مثال زیر توجه کنید.

گزاره نما : a عددی فرد است.

نقیض گزاره نما : a عددی زوج است.

توجه داشته باشد که اگر به ازای مقداری برای متغیر ، یک گزاره نما تبدیل به یک گزاره‌ی درست شـود، بـه ازای این مقدار نقیض گزاره نما ، تبدیل به یک گزاره‌ی نادرست می شود و برعکس

تمرین۳۲ : نقیض گزاره نمای زیر را بنویسید.

« عدد a از b بزرگتر است. »

حل : هر یک از گزاره نمای های زیر نقیض گزاره نمای فوق محسوب می شوند.

الف : « عدد a از b بزرگتر نیست. »

ب : « عدد a کوچکتر یا مساوی b است. »

ج : « چنین نیست که عدد a از b بزرگتر باشد. »

تمرین۳۳ : نقیض گزاره نما های زیر را بنویسید.

الف) $x^{۲}-۱=۰$

ب) $x>۵$

❋❋❋

mydars
اپلیکیشن آموزشی‌های درس

سورها

الفاظ و کلماتی از قبیل « به ازای هر»، « همواره» ، « به ازای بعضی مقادیر» یا « هیچ مقدار » و... که به ابتدای یک گزاره نما (عبارت شامل متغیر) اضافه شده و آن را تبدیل به یک گزاره می کنند را **سور**[۳] می نامند. گزاره های زیر همگی شامل سور می باشند.

- همه‌ی دانش آموزان کلاس سال گذشته قبول شده اند.
- همه‌ی اعداد اوّل فرد هستند.
- مربع بعضی از اعداد حقیقی از خودشان کوچکترند.
- هیچ عدد صحیح منفی بزرگتر از ۵ وجود ندارد.
- هر دو زاویه‌ی متقابل به رأس مساویند.
- فقط یک عدد زوج وجود دارد که اوّل می باشد.

در این قسمت سه نماد رایج برای سورها در ریاضیات را معرفی می کنیم.

سور عمومی : برای نمایش کلیت بکار می رود و به صورت « $\forall$ » نشان داده میشود و خوانده می شود « برای هر». مثلاً: گزاره‌ی معروف « مربع هر عدد حقیقی غیرمنفی است.» که با زبان ریاضی به صورت $\forall x \in R \,;\, x^۲ \geq ۰$ نوشته می شود.

هر x خاصیت p را دارد.

$\forall x; p(x)$

سور وجودی : برای نمایش وجود به کار می رود و به صورت «$\exists$» نشان داده میشود و خوانده می شود « وجود دارد». مثلاً: گزاره‌ی« وجود دارد عدد حقیقی که تفاضل مربع آن با ۴ برابر صفر می شود.» که با زبان ریاضی به صورت $\exists x \in R;\, x^۲ - ۴ = ۰$ نوشته می شود.[۴]

---

3. چون این الفاظ، برای متغیر ، قید تعیین می کنند و قلمرو متغیر گزاره نما را مشخص می کنند به همین دلیل آنها را سور به معنای « بارو» یا « حصار » یا « دیوار گرداگرد شهر» نامگذاری کرده اند. چون حصار ، قلمرو شهر را مشخص می کند.

4. یک حالت خاص از سور وجودی ، سور وحدت یا سور یگانه است. این سور برای نمایش یکتایی به کار می رود و به صورت «$\exists!$» نشان داده می شود و خوانده می شود.« فقط و فقط یک». مثلاً: گزاره‌ی« معادله‌ی $(x-۳)^۲ = ۰$ فقط و فقط یک ریشه‌ی حقیقی دارد. » که با زبان ریاضی به صورت $\exists! x \in R;\, (x-۳)^۲ = ۰$ نوشته می شود.

وجود دارد x که خاصیت p را داشته باشد.

$$\exists x; p(x)$$

سور صفر: برای نمایش عدم وجود به کار می رود و به صورت« $\nexists$ » نشان داده میشود و خوانده می شود.
« وجود ندارد». مثلاً: گزاره‌ی« هیچ عدد حقیقی وجود ندارد که مجموع مربع آن با ۴ برابر صفر شود.» که با زبان ریاضی به صورت $\nexists x \in R;\ x^{۲}+۴=۰$ نوشته می شود.

وجود ندارد x که خاصیت p را داشته باشد.

$$\nexists x; p(x)$$

توجه :

۱ : هر گزاره نما که با سور عمومی همراه شود، وقتی به یک گزاره‌ی درست تبدیل می شود که هر عضو از دامنه‌ی متغیر آن در گزاره نما صدق کند،یعنی مجموعه‌ی جواب آن برابر دامنه‌ی متغیر باشد. به عبارت دیگر مثال نقض نداشته باشد.

۲ : هر گزاره نما که با سور وجودی همراه شود، وقتی به یک گزاره‌ی درست تبدیل می شود که مجموعه‌ی جواب آن تهی نباشد.

۳ : هر گزاره نما که با سور صفر همراه شود، وقتی به یک گزاره‌ی درست تبدیل مـی شـود کـه مجموعـه‌ی جواب آن تهی باشد.

مثال : هر یک عبارت های زیر را با نماد سوری بنویسید.

الف: مجموع هر عدد مثبت و معکوس آن حداقل برابر ۲ است.

$$\forall x \in (۰,+\infty); x+\frac{۱}{x} \geq ۲$$

ب : بعضی از اعداد صحیح ریشه‌ی معادله‌ی $x^{۲}+۳x=۰$ می باشند.

$$\exists x \in Z; x^{۲}+۳x=۰$$

این سور برای بیان عبارت « فقط و فقط یک x دارای خاصیت p می باشد.» استفاده می شود. این سور که بـه سـور یکتـایی معروف است، با نماد $\exists!$ نمایش داده می شود. هر گزاره نما که با سور یکتا همراه شود، وقتی به یک گزاره‌ی درست تبدیل مـی شود که مجموعه‌ی جواب آن یک عضوی باشد.

$$\exists! x; p(x)$$

mydars
اپلیکیشن آموزشی مای درس

تمرین ۳۴ : جدول زیر را کامل کنید.

عبارت با زبان طبیعی	عبارت با زبان ریاضی
برای هر عدد حقیقی x داریم : $x^{۲} \geq ۰$	$\forall x \in R \; ; \; x^{۲} \geq ۰$
	$\forall x \in E \; ; \; x = ۲k \qquad (k \in Z)$
	$\exists p \in P \; ; \; p = ۲k \qquad (k \in Z)$
بعضی از اعداد فرد، عدد اوّل هستند.	
	$\nexists n \in N ; \sqrt{n} < ۰$

تمرین ۳۵ : گزاره های زیر را ابتدا به زبان ساده بیان کنید و سپس ارزش آنها را تعیین کنید.

الف) $\forall x \in R \; ; \; x^{۲} \geq x$

ب) $\forall x \in Z \; ; \; x(x+۱) = ۲k \qquad (k \in Z)$

ج) $\forall x \in R \; ; \; \tan x \times \cot x = ۱$

د) $\exists x \in Z \; ; |x| - ۱ < ۰$

حل :

الف) مربع هر عدد حقیقی بزرگتر یا مساوی آن است.(نادرست: زیرا مربع $\frac{۱}{۲}$ بزرگتر از $\frac{۱}{۲}$ نیست.)

ب) حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متوالی عددی زوج است.(درست)

ج) حاصل ضرب تانژانت وکتانژانت هر زاویه برابر یک است.(نادرست: زیرا تانژانت $x = \frac{\pi}{۲}$ تعریف نمی شود.)

د) بعضی از اعداد صحیح وجود دارد که اگر از قدرمطلق آنها یک واحد کـم کنـیم، حاصـل منفـی مـی شـود.

(درست، عدد $x = ۰$ این خاصیت را دارد.)

***

mydars
اپلیکیشن آموزشی های درس

نقیض گزاره های سوری

نقیض یک گزاره‌ی سوری باید طوری بیان شود که، مجموعه‌ی جواب را از حالتی کلی به حالت جزئی و بر عکس کند. مثلاً: نقیض گزاره‌ی نادرست « هر آسیایی ایرانی است.» می شود،« بعضی از آسیایی ها، ایرانی نیستند.» که درست می باشد.

لذا برای نوشتن نقیض یک گزاره‌ی سوری، کافی است نماد های $\forall$ و $\exists$ را به یکدیگر تبدیل کنیم و به جای خاصیت داده شده، نقیض آن را بنویسیم. یا اینکه نماد های $\exists$ و $\nexists$ را به یکدیگر تبدیل نماییم و خاصیت را بدون هیچگونه تغییری بنویسیم. مانند:

۱) $\sim[\forall x\,;P(x)]\equiv\exists x;\sim P(x)$

۲) $\sim[\exists x\,;P(x)]\equiv\forall x;\sim P(x)\equiv\nexists x;P(x)$

۳) $\sim[\nexists x\,;P(x)]\equiv\exists x\,;P(x)$

۴) $\sim[\forall x,\forall y\,;\,P(x,y)]\equiv\exists x,\exists y;\sim P(x,y)$

۵) $\sim[\forall x,\exists y;\,P(x,y)]\equiv\exists x,\forall y;\sim P(x,y)$

مثال : نقیض گزاره های سوری زیر را بنویسید.

الف : هر لوزی مربع است. ب : بعضی از فلزات جامد نیستند.

حل :

الف : بعضی از لوزی ها ، مربع نیستند. ب : همه‌ی فلزات جامد هستند.

تمرین ۳۶ : ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کرده و سپس نقیض آنها را بنویسید.

الف) $\forall x\in R;x^{۲}>۰$ ب) $\exists y\in R\,;(y<۰\wedge y^{۲}\leq ۱)$

حل :

الف: گزاره نادرست است. (مثال نقض آن $x=۰$)

$\sim[\forall x\in R;x^{۲}>۰]\equiv\exists x\in R;x^{۲}\not>۰\equiv\exists x\in R;x^{۲}\leq ۰$

ب : درست است. زیرا $y=-۱$ در آن صدق می کند.

$\sim[\exists y\in R;(y<۰\wedge y^{۲}\leq ۱)]\equiv\forall y\in R;\sim(y<۰\wedge y^{۲}\leq ۱)$

$\equiv\forall y\in R;(y\geq ۰\vee y^{۲}>۱)$

تمرین۳۷ : نقیض گزاره‌ی زیر را بنویسید.

همه‌ی دانشجویان بعضی از دانشگاه های تهران با هوشند.

حل : بعضی از دانشجویان هر دانشگاهی در تهران با هوش نیستند.

تمرین برای حل :

۳۸ : درستی یا نادرستی گزاره های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

۱ : هر عدد اوّل، فرد است.

۲ : $\exists x \in N : ۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$

۳ : $\exists x \in Z : ۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$

۴ : هر عدد زوج ، غیر اوّل است.

۵ : در آمار، هر متغیر ترتیبی یک متغیر کیفی است.

۶ : در احتمال، هر مجموعه‌ی پیشامد زیر مجموعه‌ی فضای نمونه ای است.

۷ : در فضای نمونه‌ی S ، پیشامدی مانند A وجود دارد که $P(A) > ۱$

۸ : طول هر پاره خط، عددی حقیقی است.

۳۹ : ارزش گزاره های زیر را تعیین کنید و سپس آنها را به زبان ریاضی بنویسید.

۱ : هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

۲ : همه‌ی اعداد اوّل فردند.

۳ : برای بعضی از مقادیر a در مجموعه‌ی اعداد حسابی داریم: $a^۲ < ۰$

۴ : عدد صحیح مثبتی مانند x وجود دارد به طوری که $۱ - ۲x > ۵$

۵ : حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگ تر یا مساوی ۲ است.

۶ : به ازای بعضی از مقادیر حقیقی x داریم : $x^۳ = x$

۴۰ : هرگاه $A = \{x \in Z | ۰ < x \leq ۵\}$ دامنه‌ی متغیر باشد، ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\exists x \in A ; x + ۴ = ۱۰$

ب) $\forall x \in A ; x + ۲ \leq ۹$

ج) $\exists x \in A ; x + ۳ \leq ۴$

د) $\forall x \in A ; x + ۱ \geq ۶$

۴۱ : ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کرده و سپس نقیض آنها را بنویسید.

الف) $\forall x\in R\ ;\ \dfrac{x^{۲}-۱}{x-۱}=x+۱$

ب) $\forall n\in N\ ;\ (۲^{n}+۱)\in P$

ج) $\forall x\in (-\infty,۰)\ ;\ x-\dfrac{۱}{x}\leq -۲$

د) $\exists y\in R\ ;\dfrac{y-۳}{۵}=۰$

۴۲ : نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

الف) بعضی از کشور ها به آبهای آزاد راه ندارند.

ب) هر مثلث یک دایره‌ی محیطی دارد.

۴۳ : ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) هر مربع، لوزی است و هیچ عدد زوجی اوّل نیست.

ب) $(\exists x\in Z\,;x^{۲}<۰)\Rightarrow(\forall x\in R\ ;\ x^{۲}>۰)$

ج) $(\nexists x\in Q;x^{۲}+۱=۰)\vee(\forall n\in N\ ;\ n^{۲}+۱>۲)$

د) $\sim(\exists x\in R;x>۱)\Leftrightarrow(\exists n\in N\ ;\ n^{۲}-۹=۰)$

هـ) $\sim(\exists x\in R;۲x+۳>۱)\Leftrightarrow\ \sim(\forall y\in Z\ ;|\,y\,|=\sqrt{y^{۲}}\ )$

۴۴ : نقیض گزاره‌ی سوری زیر را بنویسید.

$$(\forall x\in R;x^{۲}+۱>۰)\wedge(\exists n\in N\ ;\ n^{۲}-۴=۰)$$

۴۵ : نقیض گزاره‌ی سوری زیر را بنویسید.

بعضی از دانش آموزان همه‌ی کلاس های دبیرستان باهوش نیستند.

***

mydars
اپلیکیشن آموزش های درس

قوانین استنتاج

برای مطالعه

استنتاج به مفهوم نتیجه گیری است و عمل استنتاج به معنی نتیجه گیری از یک کسری گزاره‌های داده شده می باشد.اگر از p_1 و p_2 و... و p_n گزاره‌ی q نتیجه شده باشد،در این صورت می نویسند.

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ \underline{p_n} \\ \therefore\ q \end{array}$$

یا

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \mapsto q$$

یعنی گزاره‌ی شرطی $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow q$ درست می باشد. گزاره های p_1 و p_2 و... و p_n را مقدمات استنتاج می گوییم و همواره آنها را درست در نظر می گیریم.

در اینجا به چند مورد از قوانین استنتاج اشاره می کنیم.

۱) قانون انتزاع : اگر یک گزاره‌ی شرطی درست و مقدم آن نیز درست باشد، نتیجه می گیریم تالی آن نیز درست است. به عبارت دیگر

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \underline{p} \\ \therefore\ q \end{array}$$

یا

$$(p \Rightarrow q) \wedge q \mapsto q$$

۲) قانون نقیض انتزاع : اگر یک گزاره شرطی درست و نقیض تالی آن نیز درست باشد، نتیجه می گیریم نقیض مقدم نیز درست است. به عبارت دیگر

$$\begin{array}{c} \sim q \Rightarrow \sim p \\ \underline{p} \\ \therefore\ q \end{array}$$

یا

$$(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge q \mapsto q$$

۳) قانون رفع مولفه : اگر ترکیب فصلی دو گزاره درست و نقیض یکی از مولفه های آن نیز درست باشد، نتیجه می گیریم مولفه‌ی دیگر آن نیز درست است. به عبارت دیگر

$$\begin{array}{l} \sim p \vee q \\ \underline{\quad p \quad} \\ \therefore \; q \end{array}$$

یا

$$(\sim p \vee q) \wedge q \mapsto q$$

۴) قانون قیاس: اگر گزاره های شرطی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow r$ درست باشند، گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow r$ نیز درست است. به عبارت دیگر

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{q \Rightarrow r} \\ \therefore \; p \Rightarrow r \end{array}$$

یا

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \mapsto (p \Rightarrow r)$$

۵) قانون ادخال فاصل : از هر گزاره ای می توان از ترکیب فصلی آن را با گزاره های دیگر نتیجه بگیریم. به عبارت دیگر .

$$\begin{array}{l} \underline{\quad p \quad} \\ \therefore \; p \vee q \end{array}$$

یا

$$p \mapsto p \vee q$$

زیرا اگر p درست باشد، ترکیب فصلی آن با هر گزاره‌ی دلخواه نیز درست است.

۶) قانون حذف عاطف : از ترکیب عطفی دو یا چند گزاره می توانیم هر یک از آنها را نتیجه بگیریم. به عبارت دیگر

$$\begin{array}{l} \underline{p \wedge q} \\ \therefore \; p \end{array}$$

یا

$$(p \wedge q) \mapsto p$$

زیرا اگر $p \wedge q$ درست باشد، هر دو مولفه‌ی آن درست است.

توجه : با تشکیل جدول ارزشی، می توان نشان داد که گزاره های مرکب زیر مربوط به قوانین فوق همـواره درست هستند. بررسی درستی آنها به فراگیران محترم واگذار می شود.

الف) $((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow q$

ب) $((\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge q) \Rightarrow q$

ج) $((\sim p \vee q) \wedge q) \Rightarrow q$

د) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

هـ) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

و) $p \Rightarrow (p \vee q)$

***

مثال : نتیجه گیری زیر طبق قانون انتزاع درست است.

هر عدد مرکب ، عدد اوّل نیست.

x عددی مرکب است.

نتیجه : x عدد اوّل نیست.

مثال : نتیجه گیری زیر طبق قانون نقیض انتزاع درست است.

اگر فرهاد موفق نیست، آنگاه فرهاد حسود نیست.

فرهاد حسود است.

نتیجه : فرهاد موفق است.

تمرین۴۴ : درستی یا نادرستی هر یک از استنتاج های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر فردا جمعه باشد، آنگاه مدرسه تعطیل خواهد بود.

فردا مدرسه تعطیل است.

نتیجه : فردا جمعه است.

ب) هر عدد طبیعی بزرگتر از یک که دو مقسوم علیه طبیعی داشته باشد، عددی اوّل است.

عدد طبیعی و بزرگتر از یک x دو مقسوم علیه طبیعی دارد.

نتیجه : x عددی اوّل است.

mydars
اپلیکیشن آموزشی های درس

تمرین ۴۵ : استنتاج های زیر را کامل کنید.

الف) اگر هوا آلوده باشد، آنگاه مدارس تعطیل خواهند بود.

چهارشنبه هوا آلوده است.

نتیجه : ....

ب) دانش آموزان پایه‌ی دوازدهم باید کنکور بدهند.

علی پایه‌ی دوازدهم است.

نتیجه : ....

ج) اگر یک عدد طبیعی فرد نباشد، آنگاه باقی مانده‌ی آن در تقسیم بر ۲ یک نیست.

باقی مانده تقسیم عدد صحیح x بر ۲ برابر یک است.

نتیجه : ....

***

ایستگاه تفکر : به نظر شما به کمک متن زیر می توان تشخیص داد که قاتل کیست؟

تمامی گزاره ها درست هستند.

اگر حسین قاتل نیست، آنگاه پرویز قاتل است.

حسین قاتل نیست یا مقتول دیوانه بوده است.

اگر مقتول دیوانه بوده است، آنگاه قتل در میهمان خانه واقع نشده است.

قتل در میهمان خانه واقع شده است.

حالا بگویید قاتل کیست؟

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @amerimath

درس دوّم : آشنایی با نظریه ی مجموعه ها

نظر به اهمیت نظریه‌ی مجموعه ها در علم ریاضی، در این درس با مفاهیم مربوط به این نظریه آشنا می شویم.

یادآوری مفهوم مجموعه

مجموعه، دسته ای از اشیای کاملاً معین می باشد.

مثال: هر یک از موارد زیر یک مجموعه مشخص می کند.

۱: اعداد طبیعی یک رقمی مضرب ۳

۲ : رنگهای پرچم ایران

۳ : مقسوم علیه های مشترک دو عدد ۱۸و۱۲

۴ : حروف الفبای صدا دار انگلیسی

۵ : اعداد اوّل

که مجموعه‌ی آخر بر خلاف دیگر مجموعه ها نامتناهی است.

توجه: هر یک از موارد زیر، یک مجموعه مشخص نمی کنند. زیرا شامل یک واژه‌ی تعریف نشده و نامشخص می باشند و لذا نمی توان اشیاء را کاملاً شناخت و یا متمایز نمود.

۱ : دانش آموزان زرنگ کلاس

۲ : دبیران خوش فکر آموزشگاه

۳ : دانش آموزان باسلیقه‌ی آموزشگاه

یک مجموعه را با یک حرف بزرگ الفبای لاتین نامگذاری می کنند. هر یک از اشیاء تشکیل دهنده‌ی مجموعه را عضو آن مجموعه می نامند. اگر شیء a در مجموعه‌ی A باشد، می گوییم a عضو مجموعه‌ی A است و می نویسیم $a\in A$ و اگر شیء a در مجموعه‌ی A نباشد، می گوییم a عضو مجموعه‌ی A نیست و می نویسیم $a\notin A$.

هر مجموعه به روش های مختلفی نمایش داده می شود. روش های زیر ، متداول ترین این روش ها است.

mydars
اپلیکیشن آموزشی های درس

۱: نمایش تفصیلی یا گسترده (از طریق نام بردن اعضاء)

۲ : نمایش توصیفی (از طریق بیان خاصیتی برای اعضاء)

۳ : نمایش هندسی یا نمودار وِن (از طریق رسم شکل هندسی بسته)

اگر در نمایش توصیفی از علائم ریاضی استفاده شود، می گوییم که مجموعه را با **علائم ریاضی** نمایش داده ایم. در این نمایش اگر $P(x)$ خاصیتی برای اعضاء مجموعه‌ی S باشد،در این صورت می نویسند:

$$S=\{x\,|\,P(x)\}$$

تمرین ۱ : مجموعه‌ی اعداد طبیعی و فرد کمتر از ۱۰ را به صورت های فوق نمایش دهید.

حل:

۱ : نمایش تفصیلی

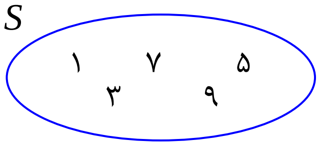
$$S=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$$

۲ : نمایش توصیفی

$$S=\{x\,|\,x\in N\,,k\in Z,\ x<۱۰\ ,\ x=۲k-۱\}$$

۳ : نمایش هندسی

S



تمرین ۲ : مجموعه‌ی اعداد اوّل یک رقمی را با علائم ریاضی بنویسید.

حل : اگر P مجموعه‌ی اعداد اوّل باشد. در این صورت:

$$S=\{۲,۳,\ ۵\ ,۷\}=\{x\,|\,x\in P\ ,\ x<۱۰\}$$

تمرین برای حل :

۳ : مجموعه‌ی مقابل را با عضوهایش نمایش دهید.

$$A=\{x^{۲}-۱\,|\,x\in Z\ ,-۲<x\leq ۳\}$$

۴ : مجموعه‌ی $S=\{۳-\sqrt{۲},۳+\sqrt{۲}\}$ را با علائم ریاضی نمایش دهید.

۵ : مجموعه‌ی مقابل را با علائم ریاضی نمایش دهید. $A=\{-۱,۰,۱,۸,۲۷,...\}$

mydars
اپلیکیشن آموزشی های درس

۶ : مجموعه های زیر را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.

الف) $A=\{x\in Z \mid |x|\leq ۲\}$

ب) $B=\{m\in Z \mid m^{۳}=m\}$

ج) $C=\{k\in R \mid k^{۲}-۱=۰\}$

د) $D=\{a\in S \mid$ فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس $S\}$

***

مجموعه‌ی تهی

اگر مجموعه ای دارای عضو نباشد، آنرا تهی می نامند. مانند مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی مضرب ۱۳

مجموعه‌ی تهی را با نماد Φ یا $\{\,\}$ نمایش می دهند.

تمرین۷ : کدام یک از مجموعه های زیر تهی است؟

الف) $A=\{x\in Z \mid x^{۲}=۹\ ,\ ۲x=۴\}$

ب) $B=\{t\in Z \mid t+۸=۸\}$

پ) $C=\{x\in Z \mid x\neq x\}$

ت) $D=\{x\in N \mid x^{۲}=۷x\}$

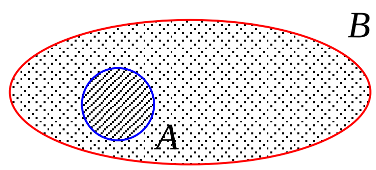
ث) $E=\{r\in Z \mid r^{۳}-۹r=۰\}$

***

زیر مجموعه‌ی یک مجموعه

مجموعه‌ی A را زیر مجموعه‌ی B گویند، هرگاه هر عضو A در مجموعه‌ی B باشد.یعنی

$$(\forall x\in A\rightarrow x\in B)\Leftrightarrow A\subseteq B$$

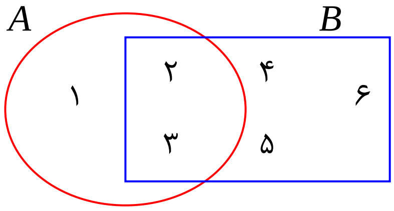


مثلاً مجموعه‌ی $A=\{۲,۳,۵\}$ زیر مجموعه‌ی، مجموعه‌ی $B=\{۱,۲,۳,....,۹\}$ می باشد.

همچنین اگر عضوی در مجموعه‌ی A باشد که در مجموعه‌ی B نباشد، می گویند A زیـر مجموعـه‌ی B نیست و می نویسند $A\not\subseteq B$.

mydars
اپلیکیشن آموزشی های درس

مثلاً در نمودار مقابل مجموعه‌ی A زیر مجموعه‌ی B نمی باشد.



***

در ادامه چند قضیه در مورد زیر مجموعه ها ذکر و اثبات می کنیم.

قضیه) هر مجموعه زیر مجموعه‌ی خودش است.($S \subseteq S$)

اثبات: (به روش برهان خلف) فرض کنیم که $S \subseteq S$ نباشد. یعنی اینکه در مجموعه‌ی S عضوی وجود دارد که در خود مجموعه‌ی S نباشد و این تناقض است. پس حکم درست است نه خلاف آن.

***

قضیه) مجموعه‌ی تهی زیر مجموعه‌ی تمام مجموعه ها است .($\Phi \subseteq S$)

اثبات: (به روش برهان خلف) فرض کنیم که $\Phi \subseteq S$ نباشد. یعنی اینکه در مجموعه‌ی Φ عضوی وجود دارد که در خود مجموعه‌ی S نباشد. این تناقض است چون مجموعه‌ی تهی فاقد عضو است. پس حکم درست است نه خلاف آن.

***

قضیه) اگر $B \subseteq C$ و $A \subseteq B$ آنگاه $A \subseteq C$ است.

اثبات :

$$\left\langle \begin{array}{l} A \subseteq B \Rightarrow (\forall x \in A \rightarrow x \in B) \\ B \subseteq C \Rightarrow (\forall x \in B \rightarrow x \in C) \end{array} \right. \Rightarrow (\forall x \in A \rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subseteq C$$

***

قضیه) تعداد کل زیر مجموعه های هر مجموعه‌ی n عضوی برابر ۲^n است.

اثبات: بدیهی است که هر عضو مجموعه‌ی S دو حالت (یا عضو زیر مجموعه هست یا نیست) دارد. پس بنا به اصل شمارش(ضرب)،تعداد کل حالت ها (زیر مجموعه ها) می شود.

$$\underbrace{۲ \times ۲ \times ... \times ۲}_{n\ \text{مرتبه}} = ۲^n$$

نتیجه: مجموعه‌ی تهی تنها دارای یک زیر مجموعه است.

$$n=۰ \Rightarrow ۲^{n}=۲^{۰}=۱$$

***

توجه : چون تعداد زیر مجموعه های r عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی، با تعداد انتخاب های r عضو از n عضو ($r \le n$) است. تعداد این انتخاب ها برابر $\binom{n}{r}$ می باشد. لذا تعداد زیر مجموعه های r عـضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر $\frac{n!}{r!(n-r)!}=\binom{n}{r}$ است.

***

تمرین۸ : مجموعه‌ی $S=\{x,y,z\}$ را در نظر بگیرید. ابتدا تعداد کل زیرمجموعه های مجموعه‌ی S را تعیین کنید و سپس تمام زیرمجموعه ها را بنویسید.

***

تمرین ۹ : تمام زیرمجموعه های مجموعه‌ی $A=\{x \mid x^{۲}-۴x=۵\}$ را بنویسید.

***

تمرین ۱۰ : مجموعه‌ی $B=\{\alpha,\beta,۴,۶,۷\}$ داده شده است.

الف) تعیین کنید که این مجموعه ، چند زیر مجموعه دارد؟

ب) تعداد زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه‌ی B را بنویسید.

ب) تمام زیرمجموعه های سه عضوی این مجموعه را مشخص کنید.

***

تمرین ۱۱ : مجموعه‌ی $\{a,b,\{a\},\{b\}\}$ دارای چند زیر مجموعه‌ی شامل عضو a می باشد؟

حل : تعداد زیر مجموعه های بدون عضو a از مجموعه‌ی $\{b,\{a\},\{b\}\}$ را تعیین می کنیم.

$۲^{۳}=۸$ تعداد مورد نظر

mydars
اپلیکیشن آموزشی های درس

تمرین ۱۲ : تعداد زیر مجموعه های سه عضوی از مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e,f\}$ شامل عضو a را تعیین کنید.

حل : کافی است، تعداد زیر مجموعه های دو عضوی مجموعه‌ی $\{b,c,d,e,f\}$ را به دست آوریم.

$$\binom{۵}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$$

توجه : به هرکدام از زیر مجموعه های دوعضوی مجموعه‌ی $\{b,c,d,e,f\}$ اگر عضو a را اضافه کنیم،یک زیر مجموعه از زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e,f\}$ شامل a به دست می آید.

تمرین ۱۳ : اگر دو عضو به تعداد اعضای مجموعه‌ی A اضافه کنیم. تعداد زیرمجموعه های آن ۴۸ واحد افزایش می یابد. تعداد اعضای مجموعه‌ی A را به دست آورید.

حل :

۴۸ = تعداد زیرمجموعه های مجموعه‌ی n عضوی − تعداد زیرمجموعه های مجموعه‌ی $n+۲$ عضوی

$$۲^{n+۲}-۲^{n}=۴۸\rightarrow ۲^{n}\times۲^{۲}-۲^{n}=۴۸$$

$$\rightarrow ۲^{n}\times۴-۲^{n}=۴۸\rightarrow ۲^{n}\times(۴-۱)=۴۸\rightarrow ۲^{n}\times۳=۴۸\rightarrow ۲^{n}=۱۶\rightarrow n=۴$$

تمرین ۱۴ : تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه‌ی k عضوی ۲۲۴ مجموعه بیشتر از تعداد زیر مجموعه های مجموعه‌ی $k-۳$ عضوی است، مقدار k را بیابید.

حل:

۲۲۴= تعداد زیر مجموعه های مجموعه‌ی $k-۳$ عضوی− تعداد زیر مجموعه های k عضوی

$$\rightarrow ۲^{k}-۲^{k-۳}=۲۲۴\rightarrow ۲^{k-۳}\times۲^{۳}-۲^{k-۳}=۲۲۴$$

$$\rightarrow ۲^{k-۳}(۸-۱)=۲۲۴\rightarrow ۲^{k-۳}=\frac{۲۲۴}{۷}\rightarrow ۲^{k-۳}=۳۲$$

$$\rightarrow ۲^{k-۳}=۲^{۵}\rightarrow k-۳=۵\rightarrow k=۸$$

تمرین۱۵: مثال هایی برای هر یک از موارد زیر برای سه مجموعه‌ی C و B و A بنویسید.

الف) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\in C$

ب) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\notin C$

ج) $A\in B$ و $A\subseteq B$

تساوی دو مجموعه

دو مجموعه را مساوی گویند، هرگاه در هیچ کدام عضوی نباشد که در دیگری یافت نشود. یعنی اعضاء هر دو یکسان باشد. مانند دو مجموعه‌ی زیر

$$\left.\begin{array}{r} A=\{۱,۲,۳\} \\ B=\{۱,۱,۳,۲,۲,۲\} \end{array}\right\} \to A=B$$

توجه کنید که در یک مجموعه تغییر ترتیب عضوها و همچنین تکرار آنها مجموعه را تغییر نمی دهد.

تمرین۱۶ : مجموعه های زیر مساویند، مقدار b و a را بیابید.

$$A=\{۱,\{a\},\{a,b\}\} \quad \text{و} \quad B=\{\{۳\},\{۲,۳\},۱\}$$

نتیجه : اگر $B\subseteq A$ و $A\subseteq B$ آنگاه $A=B$ است.

اثبات:

$$\begin{cases} A\subseteq B \Rightarrow (\forall x\in A \to x\in B) \\ B\subseteq A \Rightarrow (\forall x\in B \to x\in A) \end{cases}$$

لذا تمام عضو های دو مجموعه‌ی B و A یکسان است یعنی $A=B$.

تمرین۱۷ : اگر $A=\{۲,x+۲y,۴\}$ و $B=\{۴,۵,x-y\}$ و $A=B$ در این صورت مقادیر x و y را بیابید.

***

زیر مجموعه های محض

هر زیر مجموعه از یک مجموعه که با خود آن مجموعه برابر نباشد، را زیر مجموعه‌ی محض (اکید یا سره) می نامند. مثلاً: مجموعه‌ی $A=\{۱,۳\}$ یک زیر مجموعه‌ی محض مجموعه‌ی $B=\{۱,۲,۳\}$ است، زیرا $A\neq B$

نتیجه:

۱. هر زیر مجموعه‌ی n عضوی دارای $۲^n - ۱$ زیر مجموعه‌ی سره است.

۲. مجموعه‌ی تهی زیر مجموعه‌ی سره ندارد.

تمرین۱۸ : تعداد زیر مجموعه های اکید یک مجموعه‌ی k عضوی به تعداد ۲۳ زیر مجموعه بیشتر از تعداد کل زیر مجموعه های مجموعه‌ی $k-۲$ عضوی است. مقدار k را بیابید.

حل:

$$(۲^k - ۱) - ۲^{k-۲} = ۲۳ \to ۲^k - ۲^{k-۲} = ۲۴ \to ۲^{k-۲} \times ۴ - ۲^{k-۲} = ۲۴$$
$$\to ۲^{k-۲} \times (۴ - ۱) = ۲۴ \to ۲^{k-۲} \times ۳ = ۲۴ \to ۲^{k-۲} = ۸$$
$$\to ۲^{k-۲} = ۲^۳ \to k - ۲ = ۳ \to k = ۵$$

***

تمرین برای حل :

۱۹ : اگر تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه‌ی $k+۱$ عضوی ۳۶ واحد از ۴ برابر تعداد زیر مجموعه های اکید یک مجموعه‌ی $k-۲$ عضوی بیشتر باشد. مقدار k را بیابید.

۲۰ : مجموعه ای دارای ۳۵ زیر مجموعه‌ی ۳ عضوی است. تعداد عضو های آن مجموعه را تعیین کنید.

۲۱ : اگر دو عضو از مجموعه‌ی A را حذف کنیم. تعداد زیر مجموعه های آن ۳۸۴ واحد کم می شود. مجموعه‌ی A چند زیر مجموعه دارد؟

***

مجموعه‌ی توانی

مجموعه‌ی شامل تمام زیر مجموعه های یک مجموعه را مجموعه‌ی توانی آن مجموعه می نامند. به عبارت ساده تر، اگر X یک مجموعه باشد، مجموعه‌ی کلیه‌ی زیر مجموعه های X را مجموعه‌ی توانی آن می نامند و آن را با $P(X)$ نمایش می دهند.

تمرین۲۲ : اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ مجموعه‌ی توانی A را بنویسید.

حل:

$$P(A) = \{\Phi, \{۱\}, \{۲\}, \{۳\},, \{۱,۲\}, \{۱,۳\}, \{۲,۳\}, \{۱,۲,۳\}\}$$

نتیجه: اگر X یک مجموعه‌ی n عضوی باشد، در این صورت $P(X)$ دارای ۲^n عضو است.

تمرین۲۳ : مجموعه‌ی توانی مجموعه‌ی $A=\{\varphi,\{\varphi\}\}$ را بنویسید.

تمرین۲۴ : اگر $A=\{a\}$ باشد. مجموعه‌ی $P(P(A))$ چند عضو دارد؟

افراز یک مجموعه

اگر A یک مجموعه‌ی غیر تهی باشد، گوییم که مجموعه‌ی A به n زیر مجموعه‌ی $A_۱$ و $A_۲$ و ... و A_n افراز شده است، هرگاه:

الف) هیچ یک از زیر مجموعه ها تهی نباشد.

یعنی $\forall i \quad ۱\le i\le n \quad \to A_i\neq\Phi$

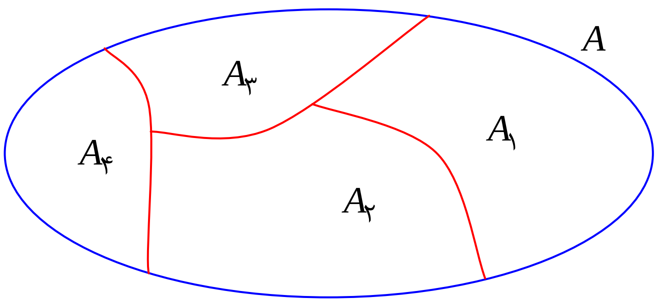
ب) اشتراک هر دو زیر مجموعه‌ی متمایز تهی باشد. یعنی

$$\forall i,j \quad ۱\le i\le n, ۱\le j\le n \quad \xrightarrow{i\neq j} A_i\cap A_j=\Phi$$

ج) اجتماع تمام زیر مجموعه ها با مجموعه‌ی اصلی برابر باشد. یعنی

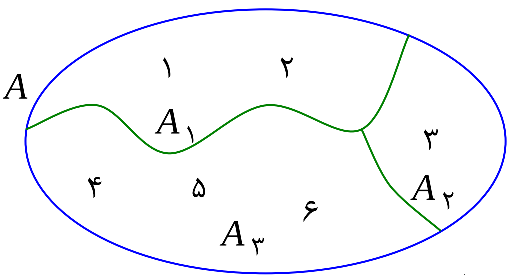
$$A_۱\cup A_۲\cup\ldots\cup A_n=\bigcup_{i=۱}^{n}A_i=A$$

به شکل مقابل توجه کنید. این شکل مجموعه‌ی A را به ۴ زیر مجموعه افراز کرده است.



مثال: اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ آنگاه مجموعه های زیر یک افراز از مجموعه‌ی A است.

$A_۱=\{۱,۲\}, A_۲=\{۳\}, A_۳=\{۴,۵,۶\}$



توجه : بنابرانتفای مقدم هر مجموعه‌ی غیر تهی، افراز خودش است.

تمرین۲۵ : تمام افراز های ممکن برای مجموعه‌ی $B=\{a,b,c\}$ را بنویسید.

mydars
اپلیکیشن آموزشی های درس

حل: این مجموعه دارای ۵ افراز متفاوت است.

۱) $\{a\},\{b\},\{c\}$ ۲) $\{a\},\{b,c\}$ ۳) $\{b\},\{a,c\}$

۴) $\{c\},\{a,b\}$ ۵) $\{a,b,c\}$

تمرین ۲۶ : فرض کنید، $X=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ کدام یک از حالت های زیر یک افراز برای X محسوب می شود.

الف) $\{d,g\}$ و $\{b\}$ و $\{a,c,e\}$ ب) $\{b,e,f\}$ و $\{c,d\}$ و $\{a,e,g\}$

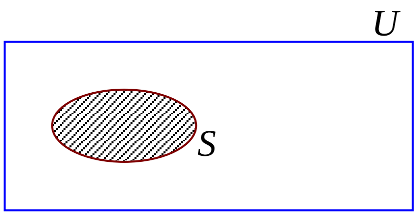
پ) $\{d,f\}$ و $\{c\}$ و $\{a,b,e,g\}$ ت) $\{a,b,c,d,e,f,g\}$

ث) $\{e\}$ و $\{f,g\}$ و $\{d\}$ و $\{b,c\}$ و $\{a\}$

***

مجموعه‌ی مرجع

در هر بحثی می توان مجموعه‌ای در نظر گرفت که، مجموعه های دیگر زیر مجموعه‌ی آن باشد، این مجموعه را مجموعه‌ی مرجع (جهانی) می نامند و آن را با M یا U نمایش می دهند.



$S\subseteq U$

در واقع مجموعه‌ی مرجع، بزرگترین مجموعه ای است که در مورد عضو های آن صحبت به میان می آید[1].

تمرین ۲۷ : هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) اگر $S\subseteq\Phi$ آنگاه $S=\Phi$.   ب) اگر $S\subseteq U$ آنگاه $S=U$.

حل:

الف) $\begin{cases}S\subseteq\Phi\\ \Phi\subseteq S\end{cases}\rightarrow S=\Phi$ ب) $\begin{cases}U\subseteq S\\ S\subseteq U\end{cases}\rightarrow S=U$

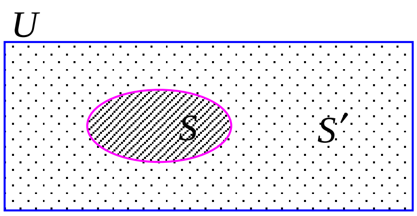
***

[1] . این مجموعه را نیز عالم سخن گویند.

mydars
اپلیکیشن آموزشی مای درس

مجموعه‌ی متمم

اگر U مجموعه‌ی مرجع و S زیر مجموعه ای از آن باشد، در این صورت اعضایی که در مرجع باشند ولی درمجموعه‌ی S نباشند، مجموعه ای تشکیل می دهند که آنرا متمم S می نامند.



$$S \subseteq U$$
$$S' \subseteq U$$
$$S' = \{x \mid x \in U \wedge x \notin S\}$$

متمم یک مجموعه مانند S را با S' یا S^c یا $\bar{S}$ نمایش می دهند.

تمرین۲۸: اگر $U = \{x \in Z \mid |x| \leq ۳\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد، متمم مجموعه‌ی $A = \{x \mid x^۳ - x = ۰\}$ را بنویسید.

نتیجه :

۱ : متمم مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی تهی است. ($U' = \Phi$)

۲ : متمم مجموعه‌ی تهی ، مجموعه‌ی مرجع است. ($\Phi' = U$)

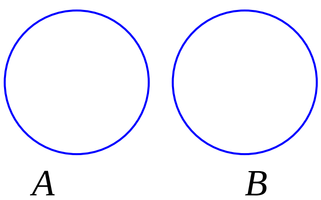
تمرین۲۹ : ثابت کنید که متمم متمم هر مجموعه ، برابر همان مجموعه است. ($(S')' = S$)

حل:

$$(S')' = \{x \mid x \in U \wedge x \notin S'\} = \{x \mid x \in U \wedge x \in S\} = S$$

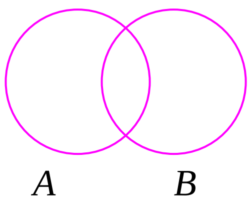
***

مجموعه های مجزا



دو مجموعه‌ی غیر تهی را جدا از هم (مجزا) گویند، هرگاه هیچ عضو مشترکی نداشته باشند. برای مثال مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی فرد و مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی زوج جدا از هم هستند.

نتیجه : هر مجموعه و متمم آن جدا از هم هستند.



اگر دو مجموعه جدا از هم نباشند (دارای عضو یا اعضای مشترک) آنها را متقاطع[۲] می گویند. برای مثال اعداد طبیعی یک رقمی زوج و اعداد اوّل یک رقمی مجزا نیستند.

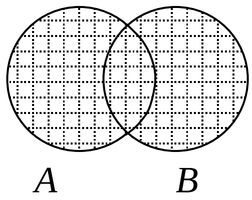
[2] . در رسم نمودار ون برای دو مجموعه ، آنها را متقاطع رسم می کنیم. مگر اینکه خلاف آن مشخص شده باشد.

mydars
اپلیکیشن آموزشی های درس

اعمال روی مجموعه ها

الف) اجتماع (اتحاد)

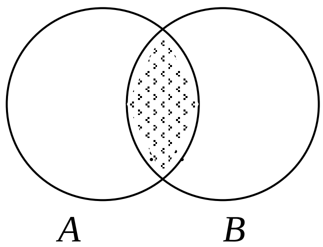
اگر B و A دو مجموعه باشند، $A \bigcup B$ مجموعه‌ی عضو هایی است که یا عضو A یا عضو B یا هر دو باشند.



$$A \bigcup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

ب) اشتراک (مقطع)

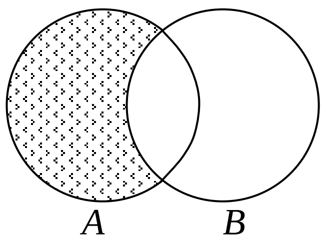
اگر B و A دو مجموعه باشند، $A \bigcap B$ مجموعه‌ی عضو هایی است که هم عضو A وهم عضو B باشند.



$$A \bigcap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

ج) تفاضل

اگر B و A دو مجموعه باشند، $A - B$ مجموعه‌ی عضو هایی است که در A باشند ولی در B نباشند.



$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

تمرین ۳۰ : اگر $A = \{x \in N \mid x < ۵\}$ و $B = \{x \in N \mid ۲ < x \leq ۵\}$ مجموعه های زیر را بنویسید.

۱) $A \bigcup B$ ۲) $A \bigcap B$ ۳) $A - B$ ۴) $B - A$

نتیجه :

۱. هر مجموعه زیر مجموعه‌ی اجتماعش با مجموعه‌ی دلخواه دیگر است .

$$A \subseteq (A \bigcup B) \text{ و } B \subseteq (A \bigcup B)$$

۲. اشتراک دو مجموعه زیر مجموعه‌ی هر یک از آنها است.

$$(A \bigcap B) \subseteq A \text{ و } (A \bigcap B) \subseteq B$$

۳. اشتراک دو مجموعه زیر مجموعه‌ی اجتماع آنها است.

$$(A \bigcap B) \subseteq (A \bigcup B)$$

mydars
اپلیکیشن آموزش های درس

۴. تفاضل دو مجموعه زیر مجموعه‌ی اوّلی است. $(A-B)\subseteq A$ و $(B-A)\subseteq B$

۵. اجتماع و اشتراک دو مجموعه خاصیت جابجایی دارند ولی تفاضل آنها جابجایی نیست.

$$A\bigcup B=B\bigcup A \quad \text{و} \quad A\bigcap B=B\bigcap A \quad \text{و} \quad A-B\neq B-A$$

۶. اشتراک هر دو مجموعه‌ی جدا از هم B و A تهی است. $A\bigcap B=\Phi$

۷. دو مجموعه ی $A-B$ و $B-A$ جدا از هم هستند.یعنی $(A-B)\bigcap(B-A)=\Phi$

***

اثبات به روش عضو گیری دلخواه

پیشتر دیدید که برای $A\subseteq B$ ، عضوی دلخواه از A را در نظر می گرفتیم و سپس نشان می دادیم که این عضو در مجموعه‌ی B واقع است. سپس نتیجه می گرفتیم که $A\subseteq B$.

این روش اثبات که در بسیاری از موارد ، کاربرد دارد را روش عضوگیری دلخواه می نامند.

تمرین ۳۱ : اگر B و A دو مجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشند و $A\subseteq B$ ثابت کنید که $B'\subseteq A'$

حل:

$$x\in B'\rightarrow x\notin B\xrightarrow{A\subseteq B}x\notin A\rightarrow x\in A'$$
$$\therefore B'\subseteq A'$$

***

تمرین ۳۲ : اگر B و A دو مجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشند، ثابت کنید که $A\subseteq A\bigcup B$

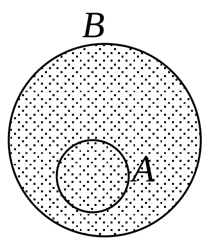
حل:

$$x\in A\rightarrow x\in A\vee x\in B\rightarrow x\in A\bigcup B$$
$$\Rightarrow (x\in A\rightarrow x\in A\bigcup B)\Rightarrow A\subseteq A\bigcup B$$

***

قضیه) اگر $A\subseteq B$ آنگاه $A\bigcup B=B$ و برعکس

حکم : $A\bigcup B=B$ فرض : $A\subseteq B$



اثبات :

mydars
اپلیکیشن آموزشی مای درس

$$x\in A\bigcup B \to (x\in A \vee x\in B) \xrightarrow{A\subseteq B} (x\in B \vee x\in B) \to x\in B \Rightarrow A\bigcup B\subseteq B$$

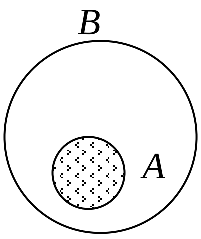
از طرفی می دانیم که $B\subseteq A\bigcup B$ لذا : $A\bigcup B=B$

....

فرض : $A\bigcup B=B$ حکم : $A\subseteq B$

اثبات : $A\subseteq A\bigcup B \xrightarrow{A\bigcup B=B} A\subseteq B$

قضیه) اگر $A\subseteq B$ آنگاه $A\bigcap B=A$ و برعکس



فرض : $A\subseteq B$ حکم : $A\bigcap B=A$

اثبات :

$$x\in A \to (x\in A \wedge x\in A) \xrightarrow{A\subseteq B} (x\in A \wedge x\in B) \to x\in A\bigcap B \Rightarrow A\subseteq A\bigcap B$$

از طرفی می دانیم که $A\bigcap B\subseteq A$ لذا : $A\bigcap B=A$

....

فرض : $A\bigcap B=A$ حکم : $A\subseteq B$

اثبات : $A\bigcap B\subseteq B \xrightarrow{A\bigcap B=A} A\subseteq B$

***

نتیجه : اگر S یک مجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشد،در این صورت احکام زیر همواره برقرار هستند.

۱. $S\bigcup S=S$	۴. $S\bigcup U=U$	۷. $S\bigcap S'=\Phi$	۱۰. $S-S=\Phi$
۲. $S\bigcup \Phi=S$	۵. $S\bigcap S=S$	۸. $S\bigcap U=S$	۱۱. $S-\Phi=S$
۳. $S\bigcup S'=U$	۶. $S\bigcap \Phi=\Phi$	۹. $U-S=S'$	۱۲. $S-S'=S$

mydars
اپلیکیشن آموزش‌های درس

نتیجه : اگر B و A دو مجموعه باشند، در این صورت احکام زیر همواره برقرار هستند.

۱. $A\bigcup(A\bigcup B)=A\bigcup B$

۲. $A\bigcap(A\bigcup B)=A$

۳. $A\bigcup(A\bigcap B)=A$

۴. $A\bigcap(A\bigcap B)=A\bigcap B$

۵. $A\bigcup(A-B)=A$

۶. $A\bigcap(A-B)=A-B$

قضیه) اگر B و A دو مجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشند،آنگاه $A-B=A\bigcap B'$ (**قانون تبدیل**)

اثبات: (به روش عضوگیری)

$$x\in A-B\rightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\rightarrow(x\in A\wedge x\in B')\rightarrow x\in A\bigcap B'$$
$$\Rightarrow A-B\subseteq A\bigcap B'$$

$$x\in A\bigcap B'\rightarrow(x\in A\wedge x\in B')\rightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\rightarrow x\in A-B$$
$$\Rightarrow A\bigcap B'\subseteq A-B$$

$$\therefore\ A-B=A\bigcap B'$$

***

قضیه) اگر C و B و A سه مجموعه باشند،آنگاه

الف) $A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$ — خاصیت شرکت پذیری اجتماع

ب) $A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C$ — خاصیت شرکت پذیری اشتراک

ج) $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$ — خاصیت توزیع پذیری اجتماع نسبت به اشتراک

د) $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ — خاصیت توزیع پذیری اشتراک نسبت به اجتماع

اثبات: (به روش عضوگیری)

الف:

$$\begin{aligned}A\bigcup(B\bigcup C)&=\{x\,|\,x\in A\vee x\in(B\bigcup C)\}\\&=\{x\,|\,x\in A\vee(x\in B\vee x\in C)\}\\&=\{x\,|(x\in A\vee x\in B)\vee x\in C\}\\&=\{x\,|\,x\in(A\bigcup B)\vee x\in C\}=(A\bigcup B)\bigcup C\end{aligned}$$

mydars
اپلیکیشن آموزشی های درس

ب: ....

$$\begin{aligned} A\cap(B\cap C) &= \{x \mid x\in A \wedge x\in (B\cap C)\} \\ &= \{x \mid x\in A \wedge (x\in B \wedge x\in C)\} \\ &= \{x \mid (x\in A \wedge x\in B) \wedge x\in C\} \\ &= \{x \mid x\in (A\cap B) \wedge x\in C\} = (A\cap B)\cap C \end{aligned}$$

ج : ....

$$\begin{aligned} A\cup(B\cap C) &= \{x \mid x\in A \vee x\in (B\cap C)\} \\ &= \{x \mid x\in A \vee (x\in B \wedge x\in C)\} \\ &= \{x \mid (x\in A \vee x\in B) \wedge (x\in A \vee x\in C)\} \\ &= \{x \mid x\in (A\cup B) \wedge x\in (A\cup C)\} = (A\cup B)\cap(A\cup C) \end{aligned}$$

د : ....

$$\begin{aligned} A\cap(B\cup C) &= \{x \mid x\in A \wedge x\in (B\cup C)\} \\ &= \{x \mid x\in A \wedge (x\in B \vee x\in C)\} \\ &= \{x \mid (x\in A \wedge x\in B) \vee (x\in A \wedge x\in C)\} \\ &= \{x \mid x\in (A\cap B) \vee x\in (A\cap C)\} = (A\cap B)\cup(A\cap C) \end{aligned}$$

***

نکته : برای هر دو مجموعه‌ی B و A داریم

۱. $x\notin (A\cup B) \leftrightarrow x\notin A \wedge x\notin B$ ۲. $x\notin (A\cap B) \leftrightarrow x\notin A \vee x\notin B$

***

قضیه) اگر B و A دو مجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشند،آنگاه

۱. $(A\cup B)' = A'\cap B'$ **۲.** $(A\cap B)' = A'\cup B'$

تساوی های فوق به **قوانین دمورگان** موسومند.

اثبات : (به روش عضوگیری)

:۱

$$x\in (A\cup B)' \to x\notin (A\cup B) \to x\notin A \wedge x\notin B \to x\in A' \wedge x\in B' \to x\in A'\cap B'$$
$$\Rightarrow (A\cup B)' \subseteq A'\cap B'$$

$$x\in A'\cap B' \to x\in A' \wedge x\in B' \to x\notin A \wedge x\notin B \to x\notin (A\cup B) \to x\in (A\cup B)'$$
$$\Rightarrow A'\cap B' \subseteq (A\cup B)'$$

$$\therefore\ (A\cup B)' = A'\cap B'$$

۲ :

$$x\in (A\cap B)'\to x\notin (A\cap B)\to x\notin A\vee x\notin B\to x\in A'\vee x\in B'\to x\in A'\cup B'$$
$$\Rightarrow (A\cap B)'\subseteq A'\cup B'$$

$$x\in A'\cup B'\to x\in A'\vee x\in B'\to x\notin A\wedge x\notin B\to x\notin (A\cap B)\to x\in (A\cap B)'$$
$$\Rightarrow A'\cup B'\subseteq (A\cap B)'$$

$$\therefore (A\cap B)'=A'\cup B'$$

***

تمرین ۳۳ : اگر A و B و C و D چهار مجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشند. ثابت کنید که اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آنگاه $A\cup C\subseteq B\cup D$

حل:

$$x\in A\cup C\to x\in A\vee x\in C\xrightarrow{A\subseteq B,C\subseteq D}x\in B\vee x\in D\to x\in B\cup D$$

$$\Rightarrow (x\in A\cup C\to x\in B\cup D)\Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup D$$

تمرین ۳۴ : اگر A و B و C سه مجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشند. ثابت کنید که اگر $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$ آنگاه $A\cup B\subseteq C$

حل : با توجه به تمرین قبل می توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}A\subseteq C\\ B\subseteq C\end{array}\right\}\to A\cup B\subseteq C\cup C\to A\cup B\subseteq C$$

تمرین ۳۵ : اگر A و B دو مجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشند و $A\subseteq B$ ثابت کنید که

$$A-B=\Phi$$

حل:

$$A-B=\{x\in U\mid x\in A\wedge x\notin B\}=\{x\in U\mid x\in B\wedge x\notin B\}=\Phi$$

***

mydars
اپلیکیشن آموزش های درس

تمرین برای حل :

۳۶ : برای مجموعه های دلخواه B و A ثابت کنید، $A-B\subseteq A$

۳۷ : اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه و $A\bigcap B=\Phi$ باشند. ثابت کنید،

الف) $A-B=A$ ب) $B-A=B$

۳۸ : اگر C و B و A سه مجموعه دلخواه و $A\subseteq B$ باشند. ثابت کنید،

الف) $A\bigcap C\subseteq B\bigcup C$ ب) $A\bigcap C\subseteq B\bigcap C$

۳۹ : اگر D و C و B و A چهار مجموعه دلخواه و $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ باشند. ثابت کنید،

الف) $A\bigcap C\subseteq B\bigcap D$ ب) $A\bigcap C\subseteq B\bigcup D$

۴۰ : اگر $B\subseteq A$ و $B\subseteq A'$ ثابت کنید که $B=\Phi$

۴۱ : اگر $A\bigcup B=A\bigcap B$. ثابت کنید که $A=B$

۴۲ : اگر $A_n=\{x\in Z\,|\,-n\le x\le n\}$ مطلوب است $A_۲-(A_۱\bigcap A_۳)$

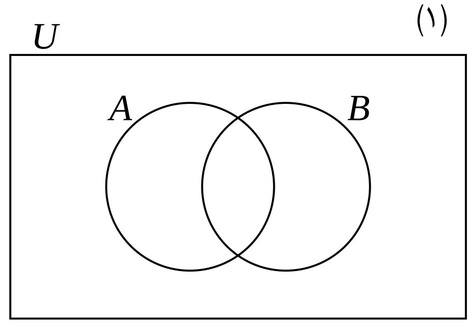
۴۳ : اگر $A_n=\{x\in N\,|\,x>۲^n\}$ آنگاه $\bigcap_{n=۱}^{۴}A_n-\bigcup_{n=۱}^{۴}A_n$ را تعیین کنید.

***

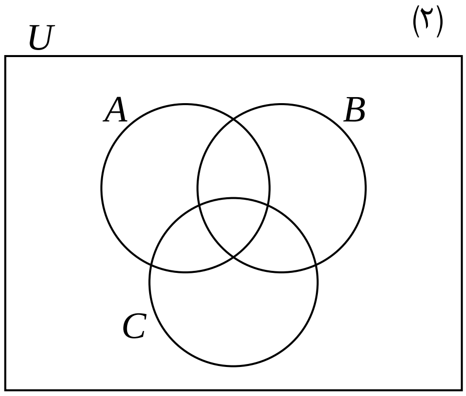
اثبات به کمک نمودار ون

همانطور که می دانید یکی از روش های نمایش یک مجموعه استفاده از نمودار ون[۳] است. استفاده از نمـودار ون برای درک و فهم اعمال روی مجموعه ها ، دارای اهمیت زیاد است.

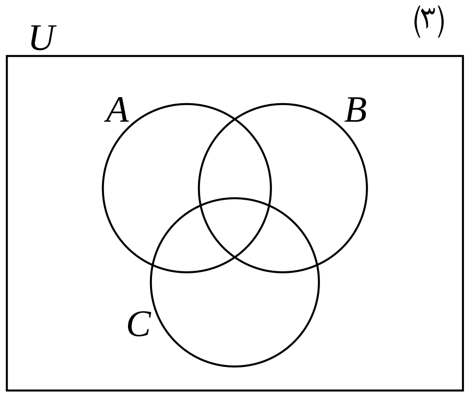
تمرین۴۴ : در هر مورد مجموعه‌ی داده شده را هاشور بزنید.



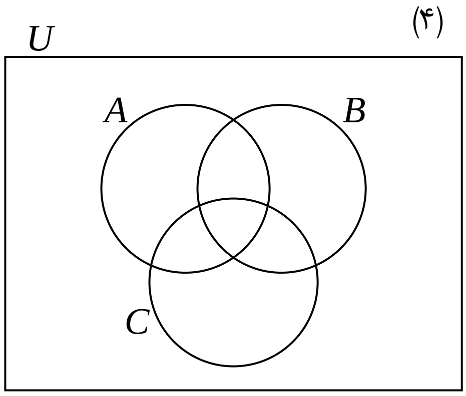
$(A-B)\bigcup(B-A)$



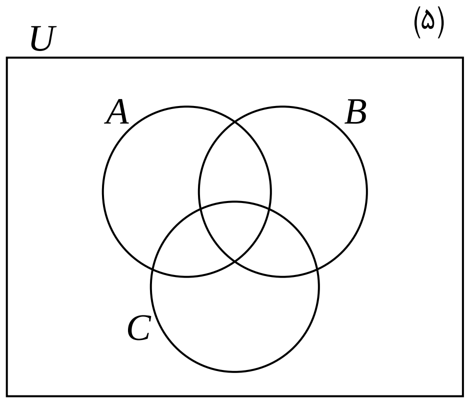
$(A\bigcup B)\bigcap C$



$A-(B\bigcap C)$



$(A\bigcup B)-C$



$(A\bigcup B)\bigcap C'$

3. این روش گاهی نارسایی دارد، ولی حالت شهودی دارد.

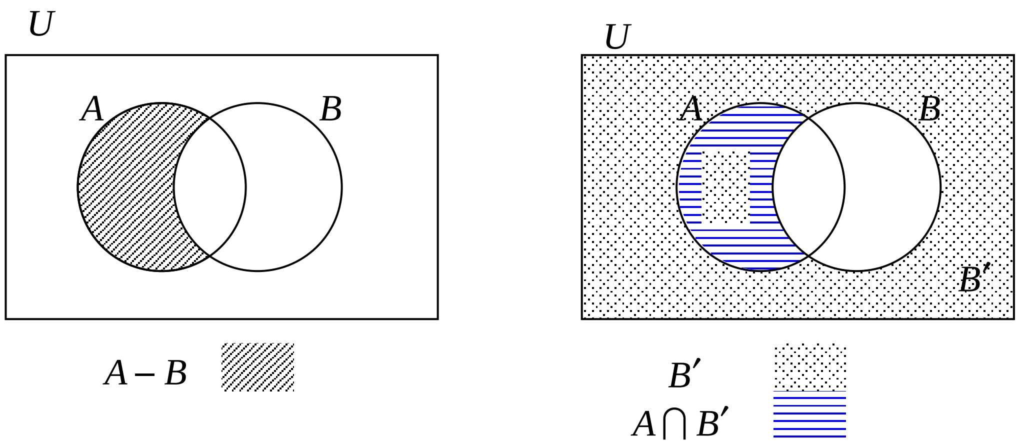
mydars
اپلیکیشن آموزشی های درس

برای بیان درستی تساوی های مجموعه ای می توان از نمودار ون استفاده نمود. برای این کار کافی است، برای هر یک از دو طرف تساوی نمودار جداگانه ای رسم نمود، سپس نشان داد که قسمت هاشور خورده کاملاً یکسان هستند.

مثال : برای دو مجموعه‌ی B و A از مجموعه‌ی مرجع U به کمک نمودار ون تساوی زیر را ثابت کنید.

$$A-B=A\bigcap B'$$

حل :



$$\Rightarrow A-B=A\bigcap B'$$

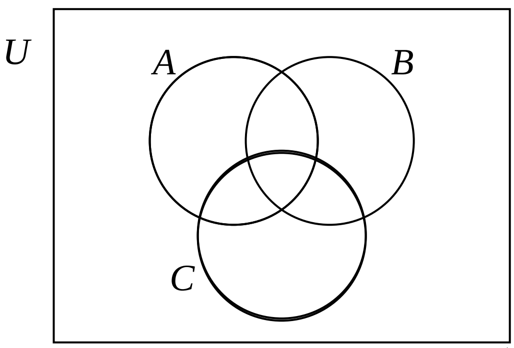
تمرین برای حل :

۴۵ : قوانین دمورگان را با استفاده از نمودار ون ثابت کنید.

۴۶ : به کمک نمودار ون تساوی زیر را ثابت کنید.

$$A'-B'=B-A$$

۴۷ : برای سه مجموعه‌ی A و B و C در هر مورد با توجه به توصیف داده شده، بخشی را هاشور بزنید.



الف : اعضایی که فقط در A باشند.

ب : اعضایی که فقط در یک مجموعه باشند.

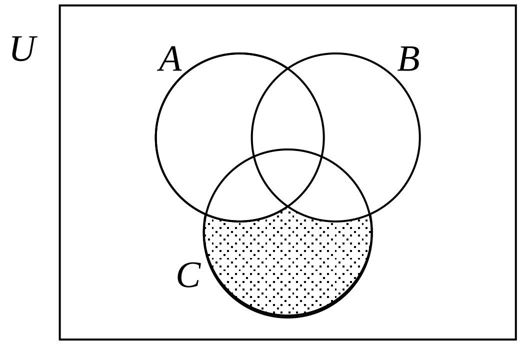
ج : اعضایی که در A یا B باشند، ولی در C نباشند.

د : اعضایی که در A یا B باشند، ولی در C نباشند.

نمودار هر مورد را با توجه به مجموعه ها جداگانه سم کنید.

mydars
اپلیکیشن آموزش های درس

۴۸ : متناظر با قسمت هاشور خورده در شکل مقابل مجموعه‌ی مناسب بنویسید.



....

***

تهیه کننده : جابر عامری   دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @amerimath

درس سوّم : جبر مجموعه ها و ضرب دکارتی

در این درس مفاهیم تکمیلی پیرامون نظریه‌ی مجموعه ها، را بیان می کنیم، آشنایی بـا ایـن مفـاهیم بـرای درک مفاهیم اساسی ریاضیات و احتمالات لازم و مفید است.

جبر مجموعه ها

در درس قبل با اعمال روی مجموعه ها آشنا شده ایم. مهمترین قوانین برای اعمال روی مجموعه ها به شرح زیر هستند. در این قوانین U مجموعه‌ی مرجع فرض شده است.

الف: خاصیت جابجایی

خاصیت جابجایی اجتماع ۱) $A \cup B = B \cup A$

خاصیت جابجایی اشتراک ۲) $A \cap B = B \cap A$

ب : خاصیت شرکت پذیری

خاصیت شرکت پذیری اجتماع ۱) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

خاصیت شرکت پذیری اشتراک ۲) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

پ : خاصیت توزیع پذیری

خاصیت توزیع پذیری اجتماع نسبت به اشتراک ۱) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

خاصیت توزیع پذیری اشتراک نسبت به اجتماع ۲) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ت : قانون جذب (همپوشانی)

اگر B و A دو مجموعه باشند، در این صورت احکام زیر همواره برقرار هستند.

۱) $A \cap (A \cup B) = A$

۲) $A \cup (A \cap B) = A$

ج : قوانین دمورگان

اگر B و A دو مجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشند، آنگاه

۱) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

۲) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

د : قانون تبدیل

اگر A و B دو مجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشند، آنگاه

$$A-B=A\bigcap B'$$

استفاده از قوانین مربوط اعمال روی مجموعه ها در اثبات تساوی های مجموعه ای را در اصطلاح جبر مجموعه ها می نامند. در این درس می خواهیم به جبر مجموعه ها، بیشتر بپردازیم.

تمرین ۱ : به کمک قوانین جبر مجموعه ها، ثابت کنید که $A-B'=A\bigcap B$

تمرین ۲ : به کمک قوانین جبر مجموعه ها تساوی زیر را ثابت کنید.

$$(A-B)\bigcap B=\Phi$$

اثبات :

$$\begin{aligned}(A-B)\bigcap B&=(A\bigcap B')\bigcap B\\&=A\bigcap (B'\bigcap B)\\&=A\bigcap \Phi=\Phi\end{aligned}$$

تمرین ۳ : هر یک از احکام زیر را به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید.

الف) $A'-B'=B-A$

ب) $A\bigcup (A-B)=A$

ج) $A\bigcap (B-C)=(A\bigcap B)-(A\bigcap C)$

د) $A\bigcap (A'\bigcup B)=A\bigcap B$

هـ) $(A-B)\bigcap C=(A\bigcap C)-B$

و) $(A\bigcup B)-(B\bigcup C)=(A-B)-C$

ز) $(A\bigcup B)\bigcap (C-A)'=A\bigcup (B-C)$

اثبات:

الف)

$$A'-B'=A'\bigcap (B')'=A'\bigcap B=B\bigcap A'=B-A$$

ب)

mydars
اپلیکیشن آموزشی های درس

$$A\cup(A-B)=A\cup(A\cap B')=A$$

ج)

$$\begin{aligned}&(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'\\&=(A\cap B)\cap(A'\cup C')=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C')]\\&=[(A\cap A')\cap B]\cup[(A\cap(B\cap C')]=(\Phi\cap B)\cup[(A\cap(B-C)]\\&=\Phi\cup[A\cap(B-C)]=A\cap(B-C)\end{aligned}$$

د)

$$A\cap(A'\cup B)=(A\cap A')\cup(A\cap B)=\Phi\cup(A\cap B)=A\cap B$$

هـ)

$$\begin{aligned}&(A-B)\cap C=(A\cap B')\cap C=A\cap(B'\cap C)\\&\qquad=A\cap(C\cap B')=(A\cap C)\cap B'=(A\cap C)-B\end{aligned}$$

و)

$$\begin{aligned}&(A\cup B)-(B\cup C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)'=(A\cup B)\cap(B'\cap C')\\&=(A\cap B'\cap C')\cup(B\cap B'\cap C')=[(A-B)\cap C']\cup\Phi=(A-B)-C\end{aligned}$$

ز)

$$\begin{aligned}&(A\cup B)\cap(C-A)'=(A\cup B)\cap(C\cap A')'=(A\cup B)\cap[C'\cup(A')']=\\&=(A\cup B)\cap(C'\cup A)=(A\cup B)\cap(A\cup C')=A\cup(B\cap C')=A\cup(B-C)\end{aligned}$$

تمرین۴ : به کمک جبر مجموعه ها تساوی زیر را ثابت کنید.

$$A\cap(A-B)'=A\cap B$$

تمرین۵ : اگر $A=\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$ و $B=\{۵,۶,۷,...,۱۵\}$ و $U=\{۱,۲,۳,...,۲۰\}$ حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $(A\cap B')\cup(A\cap B)=$

ب) $(A-B)\cup((A\cap B')\cap(B-A)\cup A'))=$

mydars
اپلیکیشن آموزشی مای درس

تمرین برای حل :

۶ : به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید که $(A-B)'=B\cup A'$

۷ : برای هر سه مجموعه‌ی دلخواه اگر C و B و A از مجموعه‌ی مرجع U ثابت کنید.

$$(A\cup B\cup C)'=A'\cap B'\cap C'$$

۸ : با استفاده از جبر مجموعه ها ثابت کنید.

$$(A-C)-(B-C)=(A-B)-C$$

۹ : با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$(A-B)\cup(A\cap C)=A-(B-C)$$

۱۰ : با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها ، درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید:

$$(A-B)\cup(A\cup B)'=B'$$

***

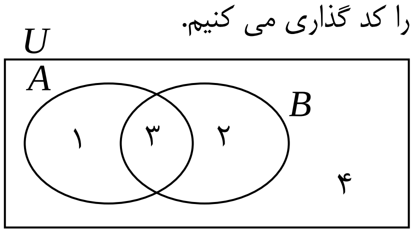
یکی از روش های اثبات تساوی های مربوط به تساوی های بین مجموعه ها، روشی موسوم به کد گذاری نواحی است. اساس این روش همان نمودار ون است، با این تفاوت که به جای هاشور زدن نواحی، آنها را کد گذاری می کند.

در این روش، ابتدا نمودار ون مربوط به مجموعه ها را در حالت کلی رسم می کنیم، سپس نواحی را کد گذاری می کنیم. در ادامه اعمال روی مجموعه ها را روی کد ها انجام می دهیم. در این روش نیازی به حفظ کردن قوانین بین اعمال بین مجموعه ها نیست، لذا روشی مناسب برای پاسخ گویی به سئوالات تستی محسوب می شود.

مثال : ثابت کنید که

$$A\cap(A'\cup B)=A\cap B$$

حل : ابتدا نمودار ون را برای دو مجموعه، رسم می کنیم و نواحی را کد گذاری می کنیم.



mydars
اپلیکیشن آموزشی های درس

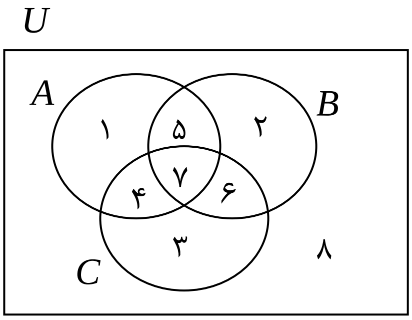
$A=\{۱,۳\} \to A'=\{۲,۴\}$

$A' \bigcup B=\{۲,۳,۴\} \to A \bigcap (A' \bigcup B)=\{۳\}=A \bigcap B$

مثال : ثابت کنید که

$A \bigcap (B-C)=(A \bigcap B)-(A \bigcap C)$

حل :



$B-C=\{۲,۵\} \to A \bigcap (B-C)=\{۵\}$

$\left.\begin{array}{l} A \bigcap B=\{۵,۷\} \\ A \bigcap C=\{۴,۷\} \end{array}\right\} \to (A \bigcap B)-(A \bigcap C)=\{۵\}$

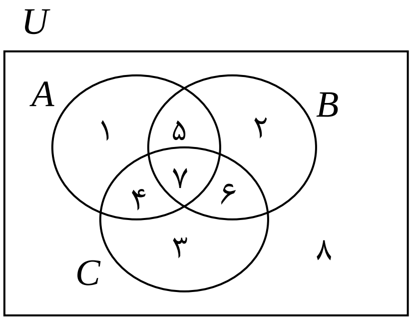
$\to A \bigcap (B-C)=(A \bigcap B)-(A \bigcap C)$

مثال : مجموعه‌ی $(A-B) \bigcup ((B \bigcap C)' \bigcap (B' \bigcup A)-B))$، با کدام مجموعه برابر است؟

(کنکور ۹۹ ریاضی)

۱) $A \bigcup B'$ ۲) $A \bigcap B'$ ۳) A ۴) B'

حل :



$A-B=\{۱,۴\}$

$B \bigcap C=\{۷,۶\} \to (B \bigcap C)'=\{۱,۲,۳,۴,۵,۸\}$

$B'=\{۱,۳,۴,۸\}$

$B' \bigcup A=\{۱,۳,۴,۵,۷,۸\} \to (B' \bigcup A)-B=\{۱,۳,۴,۸\}$

$((B \bigcap C)' \bigcap (B' \bigcup A)-B))=\{۱,۳,۴,۸\}$

$\to (A-B) \bigcup ((B \bigcap C)' \bigcap (B' \bigcup A)-B))=B'$

***

mydars
اپلیکیشن آموزش‌های درس

ضرب دکارتی دو مجموعه

اگر B و A دو مجموعه باشند، $A\times B$ مجموعه‌ی زوج های مرتبی است که مؤلفه‌ی اوّل آنها عضو A و مؤلفه‌ی دوّم آنها عضو B باشند.

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}$$

تمرین ۱۱: اگر $B=\{۲,۵\}$ و $A=\{۱,۲,۳\}$ باشد.مجموعه های زیر را تعیین کرده و نمودار هر یک از آنها را رسم کنید.

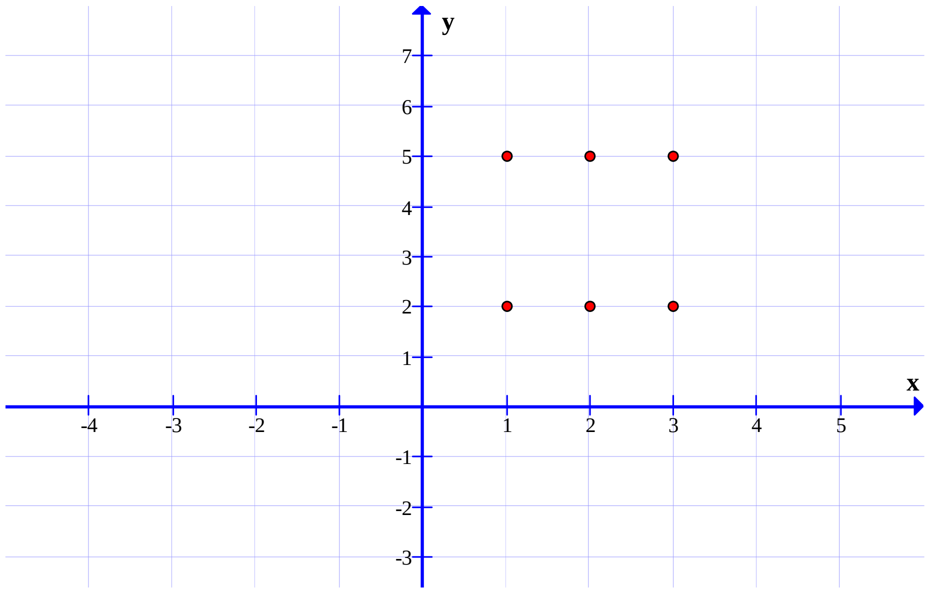
۱) $A\times B=$ ۲) $B\times A=$ ۳) $A^{۲}=$

حل:

۱)

B / A	۲	۵
۱	(۱و۲)	(۱و۵)
۲	(۲و۲)	(۲و۵)
۳	(۳و۲)	(۳و۵)

$$A\times B=\{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲),(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵)\}$$



نتیجه: اگر B و A دو مجموعه باشند، در این صورت:

۱) $n(A\times B)=n(A)\times n(B)$

۲) $n(A^{۲})=n(A).n(A)$

۳) $A\times B\neq B\times A$

۴) $A\times\Phi=\Phi\times A=\Phi$

تمـرین ۱۲ : اگـر $B=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $A=\{۱,۴,۵\}$ باشـد.مجموعـه‌ی $A\times B-B^{۲}$ را بـا عـضوهایش بنویسید.

توجه : برای هر دو مجموعه‌ی B و A، اگر $A=B$ آنگاه $A\times B=B\times A$ و برعکس

تمرین۱۳: اگر $A=\{y-۱,۵,z\}$ و $B=\{x+۱,۴,۳\}$ در این صورت، با فرض $A\times B=B\times A$، کمترین مقدار برای $x+y+z$ را بیابید.

تمرین ۱۴: اگر $A=\{y,۸,z\}$ و $B=\{x,۳\}$ در این صورت، با فـرض $A\times B=B\times A$، بیـشترین مقدار عبارت $x+y-z$ را بیابید. (جواب ۱۳)

تمرین۱۵ : ثابت کنیدکه اگر $A\times B=\Phi$،آنگاه حداقل یکی از دو مجموعـه‌ی B یـا A تهـی است و برعکس

$$A\times B=\Phi\leftrightarrow A=\Phi\vee B=\Phi$$

اثبات:

حالت اوّل
$$A\times B=\Phi\rightarrow A=\Phi\vee B=\Phi$$

اثبات (به روش برهان خلف) اگر $A\neq\Phi$ و $B\neq\Phi$ باشد،آنگاه وجـود دارد $x\in A$ و $y\in B$ بطـوری کـه $(x,y)\in A\times B$ و این مخالف فرض است.

حالت دوّم
$$A=\Phi\vee B=\Phi\rightarrow A\times B=\Phi$$

اگر $A=\Phi$ و $B\neq\Phi$ باشد،آنگاه وجود دارد $A\times B=\Phi\times B=\Phi$

اگر $A\neq\Phi$ و $B=\Phi$ باشد،آنگاه وجود دارد $A\times B=A\times\Phi=\Phi$

اگر $A=\Phi$ و $B=\Phi$ باشد،آنگاه وجود دارد $A\times B=\Phi\times\Phi=\Phi$

***

تمرین۱۶ : حکم مقابل را ثابت کنید.

$$\begin{cases}A\times B=A\times C\\ A\neq\Phi\end{cases}\rightarrow B=C$$

اثبات:

mydars
اپلیکیشن آموزش های درس

$$y\in B \xrightarrow{A\neq\Phi \to \exists x\in A} (x,y)\in A\times B \xrightarrow{A\times B=A\times C} (x,y)\in A\times C \to y\in C$$
$$\Rightarrow B\subseteq C$$

$$y\in C \xrightarrow{A\neq\Phi \to \exists x\in A} (x,y)\in A\times C \xrightarrow{A\times C=A\times B} (x,y)\in A\times B \to y\in B$$
$$\Rightarrow C\subseteq B$$

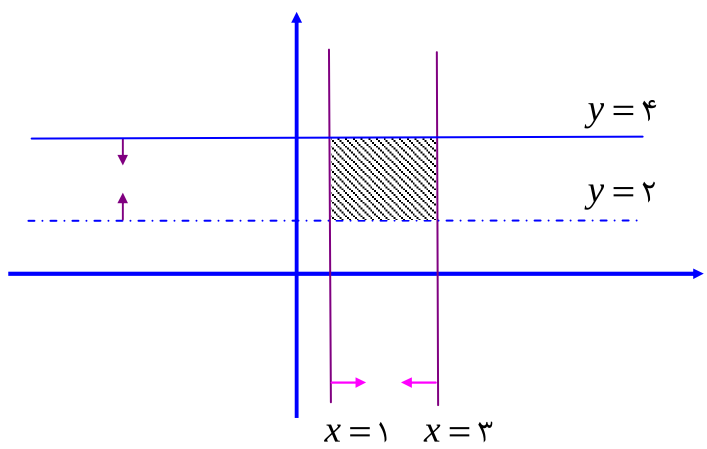
$$\therefore B=C$$

توجه : اگر دو مجموعه‌ی A یا B زیر مجموعه ی اعداد حقیقی باشند. در این صورت تعیین تمام عضوهای $A\times B$ یا $B\times A$ ممکن نیست. لذا فقط به نمایش ریاضی و رسم نمودار اکتفا می شود. برای رسم نمودار چنین مجموعه هایی ابتدا محدوده‌ی تعیین شده روی هر یک از محور های مختصات ، با توجه به مجموعه ی $A\times B$ یا $B\times A$ تعیین می کنیم. سپس ناحیه‌ی مشترک را هاشور می زنیم. (در صورتی که نامعادله‌ی متناظر آن شامل مساوی باشد نمودار کامل و اگر شامل مساوی نباشد، نمودار بصورت نقطه چین رسم می شود.)

مثال : اگر $A=\{x\in R \mid ۱\leq x\leq ۳\}$ و $B=\{x\in R \mid ۲< x\leq ۴\}$ مجموعه‌ی $A\times B$ را با نماد ریاضی نوشته و سپس نمودار آن را در صفحه نمایش دهید.

حل:

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}=\{(x,y)\mid ۱\leq x\leq ۳\ ,\ ۲< y\leq ۴\}$$



تمرین ۱۷ : در صورتی که $A=[۱,۴]$ و $B=[۰,۲]$ در این صورت، مجموعه‌ی $A\times B$ را با نماد ریاضی نوشته و سپس نمودار آن را در صفحه‌ی مختصات دکارتی، هاشور بزنید.

mydars
اپلیکیشن آموزشی های درس

تمرین ۱۸: حاصل ضرب دکارتی هر یک از مجموعه های زیر را در دستگاه محور های مختصات رسم کنید.

الف) $A=(-۱,۲]$ و $B=[-۳,۲] \to (A\times B)=?$

ب) $A=(۱,+\infty)$ و $B=(۱,۳] \to (B\times A)=?$

ج) $A=[۱,۲]$ و $B=(-\infty,۲] \to (A\times B)=?$

تمرین برای حل :

۱۹ : اگر $A=R$ و $B=\{۰,۱,۲\}$، نمودار $A\times B$ را رسم کنید.

۲۰ : اگر $A=\{y,۵,-z\}$ و $B=\{x+۱,۳,-۲\}$ در این صورت، با فرض $A\times B=B\times A$، بیشترین مقدار برای $x+y+z$ را بیابید.

۲۱ : با توجه به مجموعه های داده شده، نمودار هر یک از حاصل ضرب های $A\times B$ و $B\times A$ را رسم کنید.

الف) $A=\{۲,۳\}$ و $B=\{۲,۳,۴\}$

ب) $A=\{۳,۴\}$ و $B=(۱,۵]$

پ) $A=[۲,۶]$ و $B=[۳,۸]$

ت) $A=R$ و $B=\{۲,۳\}$

ث) $A=N$ و $B=[۱,۴]$

۲۲ : اگر $A=\{x\,|\,-۲\le x<۲\}$ و $B=\{x\,|\,-۱\le x\le ۱\}$ نمودار $A^۲-B^۲$ را رسم کنید.

***

تهیه کننده : جابر عامری   دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @amerimath